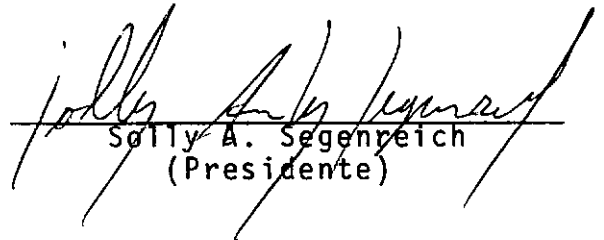


OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS

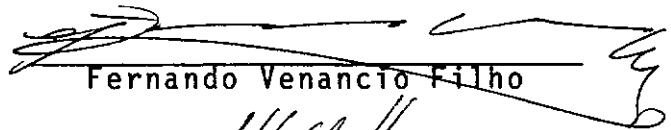
Vinicius Freire Moura

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO  
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN  
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
Sally A. Segenreich  
(Presidente)

  
Luiz Bevilacqua

  
Fernando Venancio Filho

  
Andrés L. Halbritter

  
Agustin J. Ferrante

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
AGOSTO DE 1977

FICHA CATALOGRÁFICA

MOURA, VINICIUS FREIRE

Otimização Geométrica de Treliças [Rio de Janeiro] 1977.

VI, 102p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc, Engenharia Civil, 1977)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Otimização I. COPPE/UFRJ II. Título (série).



AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Solly A. Segenreich pela orientação segura que prestou a este trabalho.

Ao engº Nilo de Oliveira Motta por todo o apoio e incentivo que foram fundamentais na consecução deste objetivo.

Ao engº Antonio Valente Branco, amigo sincero e co laborador eficiente, ao longo de todo o trabalho.

Aos engºs José Carlos Pitella e Ricardo Buzelin de Almeida cujo auxílio também foi importante.

## RESUMO

É apresentado um sistema computacional visando obter a otimização geométrica automática de treliças espaciais, baseado em um algoritmo desenvolvido por Fletcher e Reeves.

O sistema considera treliças espaciais submetidas a carregamentos externos múltiplos e restrições dos seguintes tipos:

- Geométricas: valores mínimos e máximos de coordenadas nodais, simetria de nós e retas pré-fixadas, sobre as quais sempre se situarão determinados nós.
- Comportamento: valores admissíveis para as tensões nas barras (incluindo a flambagem) e deslocamentos nodais.

São discutidos o método de análise estrutural utilizado, o algoritmo de otimização e apresentada a organização geral do sistema, através de um fluxograma.

Finalmente, comprovando a eficiência do sistema, são resolvidos exemplos, alguns dos quais baseados em projetos já executados.

### ABSTRACT

A computer system for automatic optimization of truss geometry is proposed, based upon Fletcher and Reeves algorithm.

The system applies to space trusses, with multiple loading conditions and the following constraint types:

- Geometric constraints: minimum and maximum values of joint coordinates, joint symmetry and variation of joint positions along fixed lines.
- Behavior constraints: allowable member stresses (including buckling) and maximum joint displacements.

Methods of structural analysis and the optimization algorithm are thoroughly discussed. A flowchart displays the general system organization.

In addition, examples - some of them of structures already built - are included so that the system efficiency can be verified.

ÍNDICE

	<u>PAG.</u>
I - INTRODUÇÃO - - - - -	1
1. Revisão bibliográfica - - - - -	2
2. Terminologia e Conceitos Básicos - - - - -	3
3. Nomenclatura e Notação- - - - -	6
II - OBJETIVO - - - - -	9
III - O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADO - - - - -	11
1. Apresentação do Método- - - - -	12
2. Resolução de um Exemplo Simples - - - - -	21
3. Desenvolvimento do Método - - - - -	36
IV - FLUXOGRAMA GERAL DO PROGRAMA AUTOFORM - - - - -	59
V - EXEMPLOS - - - - -	65
1. Exemplo 1 - - - - -	66
2. Exemplo 2 - - - - -	69
3. Exemplo 3 - - - - -	77
4. Exemplo 4 - - - - -	85
VI - CONCLUSÕES - - - - -	96
VII - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS - - - - -	99

C A P Í T U L O IINTRODUÇÃO



## 1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A grande aplicação que a otimização estrutural vem encontrando em diferentes áreas (por exemplo: nas indústrias aero-espacial e naval), tem estimulado o aparecimento de novas técnicas, que permitam o tratamento de problemas complexos e de grande porte.

Apesar do progresso considerável que tem sido obtido, especialmente na última década, as aplicações tem, praticamente, ficado restritas a estruturas com configurações geométricas fixas.

Entretanto, o estudo de estruturas, em que a configuração geométrica é variável, não é novo, tendo sido iniciado por Maxwell em 1854 [12], e posteriormente continuado e ampliado por Michell em 1904 [13].

Após um grande período de estagnação, pois os resultados obtidos não permitiam aplicações práticas de interesse, o advento dos computadores digitais trouxe um novo alento a esses estudos, no início da década de sessenta. Surgiram, então, alguns trabalhos como o de Hemp [11], Cox [2] e, em especial, o de Dorn, Gomory e Greenberg [4].

Esses autores desenvolveram um método, pelo qual eram escolhidos um conjunto de pontos no espaço, onde poderiam ser situados nós de treliça, e determinaram como esses nós deveriam ser conectados, de forma a suportar o carregamento exterior, com a mínima quantidade de material, problema que era resolvido através da técnica de programação linear.

Dobbs e Felton em 1969 [3] expandiram esse trabalho

usando programação não-linear, considerando carregamentos múltiplos e a flambagem das barras comprimidas, embora sô incluíssem em seu estudo treliças planas. Pedersen [14], no mesmo ano, apresentou um interessante método, em que as coordenadas nodais eram tratadas como variáveis independentes. Entretanto, todos os estudos apresentados até essa época tinham como limitação importante, o número de variáveis que podiam ser consideradas, restringindo as aplicações práticas a estruturas de pequeno porte.

Nos últimos cinco anos, tem aumentado o número de trabalhos importantes nesse campo ([1], [7], [10], [15], [17], [18] [19] e [20]), permitindo o tratamento com eficiência de problemas de maior porte, embora ainda haja um longo caminho a percorrer, até que a otimização de estruturas com configurações geométricas variáveis, se incorpore ao dia a dia da engenharia estrutural.

## 2. TERMINOLOGIA E CONCEITOS BÁSICOS

Inicialmente, vamos introduzir a terminologia e os conceitos básicos utilizados neste trabalho, de forma a facilitar a compreensão do mesmo.

### 2.1. Variáveis de Projeto

Variáveis de projeto são os parâmetros que descrevem a configuração estrutural, as propriedades físicas e mecânicas dos materiais utilizados, assim como quaisquer outros aspectos quantificáveis do projeto.

A escolha das variáveis de projeto a serem conside-

radas indica a hierarquia, ou seja, a ordem de complexidade do problema tratado. Gallagher [9] apresenta a seguinte classificação em ordem crescente de dificuldade:

- Variação das características da seção transversal dos elementos da estrutura (por exemplo: área, momentos de inércia). Esses problemas constituem a maioria dos casos apresentados nos trabalhos de otimização estrutural.
- Variação da configuração geométrica da estrutura, geralmente representada pelas coordenadas dos nós.
- Variação das propriedades dos materiais constituintes da estrutura.

Geralmente, durante o processo de otimização, as variáveis de projeto são tomadas como componentes de um vetor, chamado vetor das variáveis de projeto, ou simplesmente, vetor de projeto.

## 2.2. Função Objetivo

A função objetivo, também chamada função de custo ou de mérito, é a função cujo valor deverá ser otimizado (maximizado, ou como no caso presente, minimizado).

Ela é uma função escalar do vetor de projeto, e deve representar, o mais fielmente possível, a propriedade de maior importância da estrutura estudada.

## 2.3. Restrições

Uma restrição, em qualquer classe de problemas, é uma

condição a ser satisfeita pelo vetor de projeto, para que a estrutura, por ele representada, possa ser considerada factível. Essa condição poderá ser, ou não, uma função linear do vetor de projeto.

Existem, basicamente, dois tipos de restrições a serem considerados:

- Restrições geométricas ou diretas: são aquelas que tomam a forma de uma imposição direta sobre o vetor de projeto (por exemplo: valores mínimos de áreas ou momentos de inércia de seções transversais e de coordenadas nodais).
- Restrições de comportamento ou indiretas: constituem-se das limitações impostas sobre as características de comportamento da estrutura (por exemplo: valores de tensões e deslocamentos nodais admissíveis).

#### 2.4. Espaço de Projeto e Região Factível

O espaço de projeto é, por definição, um espaço de dimensão igual à do vetor de projeto. Nesse espaço definimos um sistema de eixos ortogonais, cada um deles representando uma das variáveis de projeto, de forma a permitir que os problemas de otimização tenham uma representação gráfica.

A existência de restrições gera uma divisão do espaço de projeto em dois sub-espacos: o primeiro é o lugar geométrico de todos os vetores de projeto que atendem às restrições impostas sendo, por isso mesmo, chamado de região factível; o segundo é o complemento do primeiro em relação ao espaço total, e nele estão situados os projetos que violam pelo menos uma res -

trição.

Assim, em um processo de otimização devemos sempre buscar vetores de projeto pertencentes à região factível, sendo que o ponto ótimo será o vetor, que além de atender a esta condição, minimize a função objetivo.

### 3. NOMENCLATURA E NOTAÇÕES

#### 3.1. Representação de Matrizes e Vetores

Matrizes e vetores serão representados por letras romanas (maiúsculas ou minúsculas) sob as quais se coloca um til (~). Por exemplo:  $\underline{A}$  representa a matriz (ou vetor, de acordo com o caso)  $A$ .

Os elementos de matrizes e vetores serão indicados por letras romanas minúsculas, com sub-índices do mesmo tipo de letra, que indicam a posição relativa do elemento considerado. Por exemplo:  $a_i$  representa o elemento de ordem  $i$  do vetor  $\underline{A}$  e  $b_{ij}$  o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $\underline{B}$ .

#### 3.2. Letras Romanas Maiúsculas

$A$  - área da seção transversal

$E$  - módulo de Young

$H$  - carga horizontal

$\underline{K}$  - matriz de rigidez global

$K$  - coeficiente de rigidez

$L$  - comprimento

$N$  - número de barras concorrentes em um nó

- $\underline{P}$  - vetor das cargas nodais
- $R$  - raio de giração mínimo
- $\underline{S}$  - variação do vetor de projeto
- $\underline{U}$  - vetor dos deslocamentos nodais
- $V$  - carga vertical
- $\underline{X}$  - vetor das variáveis de projeto
- $X$  - eixo coordenado
- $Y$  - eixo coordenado
- $Z$  - eixo coordenado

### 3.3. Letras Romanas Minúsculas

- $c$  - restrição de comportamento
- $g$  - restrição geométrica
- $i$  - número de barra, nó, etc.
- $j$  - número de barra, nó, etc
- $\underline{k}$  - contribuição de uma barra para a matriz de rigidez global
- $\underline{p}$  - vetor das cargas aplicadas em um nó
- $\underline{r}$  - matriz de rotação
- $\underline{u}$  - vetor dos deslocamentos de um nó
- $x$  - coordenada nodal

### 3.4. Letras Gregas Minúsculas

- $\beta$  - coeficiente de ajuste do passo
- $\gamma$  - ângulo diretor
- $\theta$  - ângulo
- $\lambda$  - índice de esbeltez
- $\rho$  - peso específico
- $\sigma$  - tensão

### 3.5. Índices Gerais

adm - admissível

c - compressão

max - máximo

min - mínimo

t - tração

x - em relação ao eixo X

y - em relação ao eixo Y

z - em relação ao eixo Z

### 3.6. Siglas

NAP - número de nós para apoio

NEC - número de carregamentos exteriores

NJ - número de nós

NM - número de barras

NRA - número de restrições de comportamento ativas

NRC - número de restrições de comportamento

NRG - número de restrições geométricas

C A P Í T U L O   I I

OBJETIVO



Este trabalho tem como objetivo apresentar um método para a otimização estrutural de treliças espaciais, submetidas a carregamentos externos múltiplos, através da variação das configurações geométricas ("Lay-outs") das mesmas.

O método de otimização utilizado é aproximado, porém bastante eficiente, garantindo a sua aplicabilidade na prática.

As variáveis de projeto escolhidas são as coordenadas nodais da treliça, e a função objetivo representa o peso da estrutura.

As restrições geométricas consideradas são:

- Valores máximos e mínimos das coordenadas nodais
- Simetria de nós em relação a um dos planos de referência
- Retas pré-fixadas sobre as quais determinados nós estarão sempre situados

As restrições de comportamento incluídas são:

- Valores admissíveis para as tensões nas barras das treliças, compreendendo valores máximos (trações) e mínimos (compressões, considerando o efeito da flambagem).
- Valores admissíveis para os deslocamentos nodais da treliça

Finalmente, para complementar o escopo deste trabalho, desenvolveu-se um programa para computadores digitais, que permite a aplicação na prática dos conceitos de otimização apresentados.

C A P Í T U L O   I I I

O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADO

## 1. APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

Primeiramente, vamos apresentar a formulação geral do método de otimização utilizado, deixando a discussão dos aspectos complementares, tais como demonstrações e deduções de fórmulas, para o item III-3.

Seja uma treliça espacial, na qual o número de nós é igual a  $NJ$ , o de barras  $NM$  e o de carregamentos exteriores  $NEC$ .

Chamemos de  $\underline{X}$  o vetor de projeto, cujos elementos são as coordenadas dos nós da treliça, e de  $W(\underline{X})$  a função objetivo, definida como o peso da estrutura, ou seja:

$$W(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{NM} \rho^i A^i L^i \quad (\text{III-1})$$

onde  $\rho^i$ ,  $A^i$  e  $L^i$  são, respectivamente, o peso específico, a área da seção transversal e o comprimento da barra  $i$ .

Para cada configuração geométrica estudada, ou seja, para cada valor do vetor de projeto  $\underline{X}$ , deverão ser atendidas restrições geométricas e de comportamento. As restrições geométricas consideradas são as seguintes:

- Valores máximos e mínimos das coordenadas nodais

$$x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max} \quad i=1,2,\dots,3NJ \quad (\text{III-2})$$

- Simetria de nós em relação a um dos planos de referência

$$x_{3(j-1)+i} = \eta_i x_{3(k-1)+i} \quad i=1,2,3 \quad (\text{III-3})$$

onde  $j$  e  $k$  são nós simétricos e  $\eta_i$  é um coeficiente que vale  $+1$ , se  $i$  corresponde a um dos eixos coordena

dos que se situam no plano de simetria, e -1 em caso contrário. Por exemplo: considerando XY como plano de simetria,  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  e  $\eta_3 = -1$ .

- Variação da posição de um nó sempre sobre uma reta pré-fixada

$$x_{3j} = m_1 x_{3j-1} + m_2 \quad (\text{III-4})$$

$$x_{3j} = m_3 x_{3j-2} + m_4$$

onde j é o número do nó e  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  são constantes que dependem da reta fixada.

As restrições de comportamento incluídas são:

- Valores admissíveis para as tensões nas barras da treliça

$$\sigma_{c,adm}^i \leq \sigma^{i,j} \leq \sigma_{t,adm}^i \quad i=1,\dots,NM; j=1,\dots,NEC \quad (\text{III-5})$$

onde i é o número da barra e j o do carregamento considerado.

- Valores admissíveis para os deslocamentos nodais da treliça

$$|u_i^j| \leq u_{i,max} \quad i=1,\dots,3NJ; j=1,\dots,NEC \quad (\text{III-6})$$

onde i é o número de ordem do deslocamento considerado.

As restrições especificadas podem ser apresentadas sob a seguinte forma geral:

- Restrições geométricas:  $g_i(\underline{X}) \leq 0 \quad i=1,\dots,NRG \quad (\text{III-7})$

- Restrições de comportamento:  $c_i(\underline{X}) \leq 0 \quad i=1, \dots, \text{NRC}$   
(III-7)

onde NRG e NRC são, respectivamente, os números de restrições geométricas e de comportamento.

Como exemplo, tomemos o grupo de inequações (III-5), que dará origem às seguintes restrições sob a forma geral:

$$\begin{aligned} c_m(\underline{X}) &= \sigma_{c,adm}^i - \sigma^{i,j} \leq 0 \quad 1 \leq m \leq \text{NRC} \\ c_n(\underline{X}) &= \sigma^{i,j} - \sigma_{t,adm}^i \leq 0 \quad 1 \leq n \leq \text{NRC} \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

Finalmente, vamos definir como restrições ativas aquelas que são satisfeitas como igualdades, ou seja:

$$c_i(\underline{X}) \text{ é ativa, } 1 \leq i \leq \text{NRC} \leftrightarrow c_i(\underline{X}) = 0^- \quad (\text{III-9})$$

Consideremos, agora, que uma certa coordenada  $x_j$  sofra uma variação pequena  $\Delta x_j$ . A função objetivo, em decorrência sofrerá uma variação igual a:

$$\Delta W(\underline{X}) = \frac{\partial W(\underline{X})}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (\text{III-10})$$

Se o valor de  $\Delta x_j$  for escolhido de tal forma que  $\Delta W(\underline{X}) \leq 0$ , obteremos uma redução de peso. Fazendo

$$\Delta x_j = - \frac{\partial W(\underline{X})}{\partial x_j}$$

e substituindo em (III-10), vem:

$$\Delta W(\underline{X}) = - \left( \frac{\partial W(\underline{X})}{\partial x_j} \right)^2 \leq 0$$

e teríamos necessariamente uma redução de peso. Repetindo o pro

cedimento para todas as coordenadas nodais, e chamando de  $\underline{S}$  a variação do vetor de projeto, podemos escrever:

$$\underline{S} = -\nabla W(\underline{X}) \quad (\text{III-11})$$

Com esta construção, além de garantirmos a redução de peso, teremos uma vantagem a mais, pois o gradiente da função objetivo indica a direção de maior acréscimo (ou decréscimo de acordo com o sentido adotado) desta função.

Esse método de otimização, extremamente difundido, é conhecido como "steepest descent" e apresenta como principais vantagens a sua simplicidade e os bons resultados obtidos nas iterações iniciais. A principal desvantagem está na sua convergência, extremamente lenta e ineficiente, o que restringe a sua aplicação em otimização estrutural.

Fletcher e Reeves desenvolveram em 1964 um método derivado do anterior, que além de possuir as mesmas características de simplicidade, apresenta boa convergência, permitindo o seu emprego em problemas de grande porte, conforme comenta Walsh [22] em seus trabalhos. A desvantagem do método está relacionada com a sua estabilidade relativamente fraca, se comparada com a de outros métodos, em especial com a do método de Davidon, Fletcher e Powell. Entretanto, Fox [6] adverte que o último método, pelo grande esforço computacional e memória extensa que são exigidos no cálculo da matriz Hessiana, só pode ser aplicado com eficiência em problemas pequenos e médios (até 150 variáveis). Finalmente, é importante notar que as características particulares dos problemas de otimização estrutural permitem a utilização de métodos menos estáveis com bons resulta-

dos.

A formulação geral do método de Fletcher e Reeves é apresentada a seguir:

- Primeira Iteração

$\underline{x}^1$  = valor inicial do vetor de projeto

$$\underline{s}^1 = - \underline{\nabla} W(\underline{x}^1) \quad (\text{III-12})$$

$$\underline{x}^2 = \underline{x}^1 + \beta^1 \underline{s}^1$$

onde  $\underline{x}^2$  é o valor do vetor de projeto após a primeira iteração (ou primeiro passo) e  $\beta^1$  é um número positivo, denominado coeficiente de ajuste do passo.

- I-ésima Iteração

$$\underline{s}^i = -\underline{\nabla} W(\underline{x}^i) + \alpha \underline{s}^{i-1}$$

$$\alpha = \frac{|\underline{\nabla} W(\underline{x}^i)|^2}{|\underline{\nabla} W(\underline{x}^{i-1})|^2} \quad (\text{III-13})$$

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + \beta^i \underline{s}^i$$

Como pode ser observado a partir das equações (III-12) e (III-13),  $\underline{s}^i$  é uma combinação linear de  $\underline{\nabla} W(\underline{x}^i)$ ,  $\underline{\nabla} W(\underline{x}^{i-1})$ , ...,  $\underline{\nabla} W(\underline{x}^1)$ . Com esta construção é fácil demonstrar [6] que a variação do vetor de projeto leva a uma redução da função objetivo, o que pode ser feito de maneira análoga à apresentada para o método do "steepest descent", através da expressão (III-10).

A variação do vetor de projeto,  $\underline{s}^i$ , calculada pelas equações anteriores, só poderá ser considerada caso não acarrete a violação de alguma das restrições consideradas no processo.

A verificação das restrições geométricas é simples, pois pode ser efetuada por comparação direta ao final de cada iteração. Isto não ocorre com as restrições de comportamento, que exigem um tratamento mais elaborado. Entretanto, mesmo para estas, há uma simplificação a ser feita, a partir da consideração que a variação de cada coordenada nodal é pequena. Assim, basta que analisemos as restrições ativas, ou seja, aquelas que realmente estarão influenciando na iteração considerada.

Seja uma restrição de comportamento ativa,  $c_i(\underline{X})$ ,  $1 \leq i \leq \text{NRA}$ , onde NRA é o número total destas restrições. A variação no seu valor, devida a uma alteração na coordenada  $x_j$ , igual a  $\Delta x_j$ , será:

$$\Delta c_i(\underline{X}) = \frac{\partial c_i(\underline{X})}{\partial x_j} \Delta x_j \quad j=1, \dots, 3NJ \quad (\text{III-14})$$

Se garantirmos que  $\Delta c_i(\underline{X}) \leq 0$ , ou seja, se o valor de  $\Delta x_j$  for escolhido de tal forma que isso aconteça, a restrição não será violada.

Considerando tudo o que foi exposto, o procedimento a ser seguido em uma iteração qualquer do método de otimização deverá ser o seguinte:

- 1ª Fase:

Calcular o valor de  $\nabla W(\underline{X}^i)$  e obter a variação do vetor de projeto,  $\underline{S}^i$ , através das fórmulas (III-12) ou (III-13), conforme o caso.

- 2ª Fase:

Determinar quais restrições de comportamento são ati



vas para  $\underline{x}^i$ .

- 3ª Fase:

Calcular  $\frac{\partial c_m(\underline{x}^i)}{\partial x_j}$   $m=1, \dots, NRA; j=1, \dots, 3NJ$

- 4ª Fase:

Verificar para cada componente de  $\underline{s}^i$  se o valor calculado na 1ª Fase não implica na violação de alguma restrição de comportamento, ou seja, se  $\frac{\partial c_m(\underline{x}^i)}{\partial x_j} s_j \leq 0$ , para  $i=1, \dots, NRA$ . Podemos ter dois casos:

- a) Nenhuma restrição é violada e nesse caso mantemos o valor de  $s_j$  calculado.
- b) Pelo menos uma das restrições é violada e nesse caso não poderemos variar  $x_j$ , sem sair da região factível do espaço de projeto. Logo, fazemos  $s_j = 0$ .

- 5ª Fase:

Finalmente, verificamos as restrições geométricas. Podemos ter três casos de acordo com o tipo de restrição:

- a) Verificação dos valores máximos e mínimos das coordenadas nodais que pode ser realizada por simples comparação.
- b) Verificação da simetria de nós em relação a um dos planos de referência:

- Por exemplo vamos supor que os nós  $\underline{m}$  e  $\underline{n}$  devem ser simétricos em relação ao plano YZ. Logo, de acordo com as equações (III-3) devemos ter:

$$s_{3m-2}^i = -s_{3n-2}^i$$

$$s_{3m-1}^i = s_{3n-1}^i \quad (\text{III-15})$$

$$s_{3m}^i = s_{3n}^i \quad \text{sendo } i \text{ o número da iteração}$$

Suponhamos, ainda, que as fases anteriores nos levaram a obter o mesmo sinal para todas as componentes de  $\underline{S}$  referentes a  $\underline{m}$  e  $\underline{n}$ . Logo a primeira equação do grupo (III-15) seria incompatível o que nos leva a fazer:

$$s_{3m-2}^i = s_{3n-2}^i = 0$$

A segunda equação será atendida se igualarmos os módulos de  $s_{3m-1}^i$  e  $s_{3n-1}^i$ , tomando como base o menor valor dentre os obtidos para essas variações nas fases anteriores do processo, a fim de garantir a factibilidade do novo projeto. A terceira equação deverá ser dado um tratamento idêntico ao da segunda.

c) Verificação de que determinados nós se situem sempre sobre retas pré-fixadas:

- Vamos supor, por exemplo, que o nó  $\underline{n}$  deverá se situar sobre uma reta. Logo das equações (III-4) temos:

$$s_{3n}^i = m_1 s_{3n-1}^i \quad \text{e} \quad s_{3n}^i = m_3 s_{3n-2}^i \quad (\text{III-16})$$

onde  $i$  é o número da iteração e  $m_1$ ,  $m_3$  constantes que dependem da reta considerada.

- Inicialmente, verificamos se os sinais de  $s_{3n-2}^i$

$s_{3n-1}^i$  e  $s_{3n}^i$  são compatíveis, com o auxílio dos coeficientes  $m_1$  e  $m_3$ . Se tal não ocorrer, fazemos:

$$s_{3n-2}^i = s_{3n-1}^i = s_{3n}^i = 0$$

Se os sinais estiverem corretos, calculamos o valor dos módulos, a partir das equações(III-16). Exemplificando, tomamos o valor de  $s_{3n-1}^i$ , calculado anteriormente, e obtemos, com a primeira das duas equações citadas, o valor de  $s_{3n}^*$ . Verificamos, então se esse valor tem módulo menor do que  $s_{3n}^i$ , e em caso afirmativo, fazemos  $s_{3n}^i = s_{3n}^*$ . Caso contrário, invertemos o processo e calculamos  $s_{3n-1}^i$  a partir do valor original de  $s_{3n}^i$ . Essas operações visam garantir a factibilidade do novo projeto, e deverão prosseguir, de maneira análoga, com a segunda equação do grupo(III-16).

Não serão incluídas neste trabalho as demonstrações sobre a convergência do método de Fletcher e Reeves, por envolverem desenvolvimentos extensos e, portanto, considerados fora do escopo a que nos propusemos. As demonstrações citadas poderão ser encontradas em vários trabalhos de diferentes autores, como por exemplo nos de Fox [6].

Entretanto, no item III-3 apresentaremos todas as fórmulas necessárias à aplicação do referido método, incluindo, quando for o caso, as deduções correspondentes. Ainda no mesmo item, analisaremos a função do coeficiente de ajuste do passo, visando obter um processo de otimização eficiente, e avaliaremos a

precisão dos resultados proporcionados pelo método apresentado, tendo em vista que ele é aproximado.

## 2. RESOLUÇÃO DE UM EXEMPLO SIMPLES

A seguir, vamos resolver um tri-articulado simples, que nos permitirá exemplificar o método de otimização proposto.

Seja o tri-articulado da figura III-1, submetido a dois carregamentos exteriores, sendo um deles uma carga vertical  $V$ , na direção e sentido do eixo  $Y$  da estrutura, e o outro, uma carga horizontal  $H$ , na direção e sentido do eixo  $X$ .

Inicialmente, verificamos que a estrutura poderá ser integralmente descrita com o auxílio, apenas, das variáveis  $m$  e  $h$ . Assim, em vez de considerar o vetor de projeto constituído pelas seis coordenadas nodais, vamos incluir somente as duas variáveis citadas, o que nos permitirá obter um espaço de projeto a duas dimensões. Logo:

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} m \\ h \end{Bmatrix} \quad (\text{III-17})$$

A função objetivo terá o seguinte aspecto:

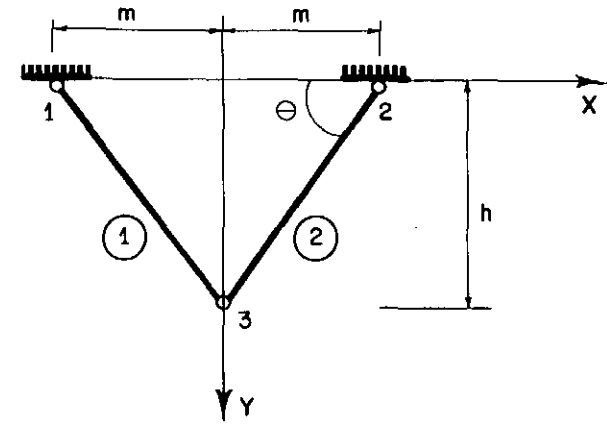
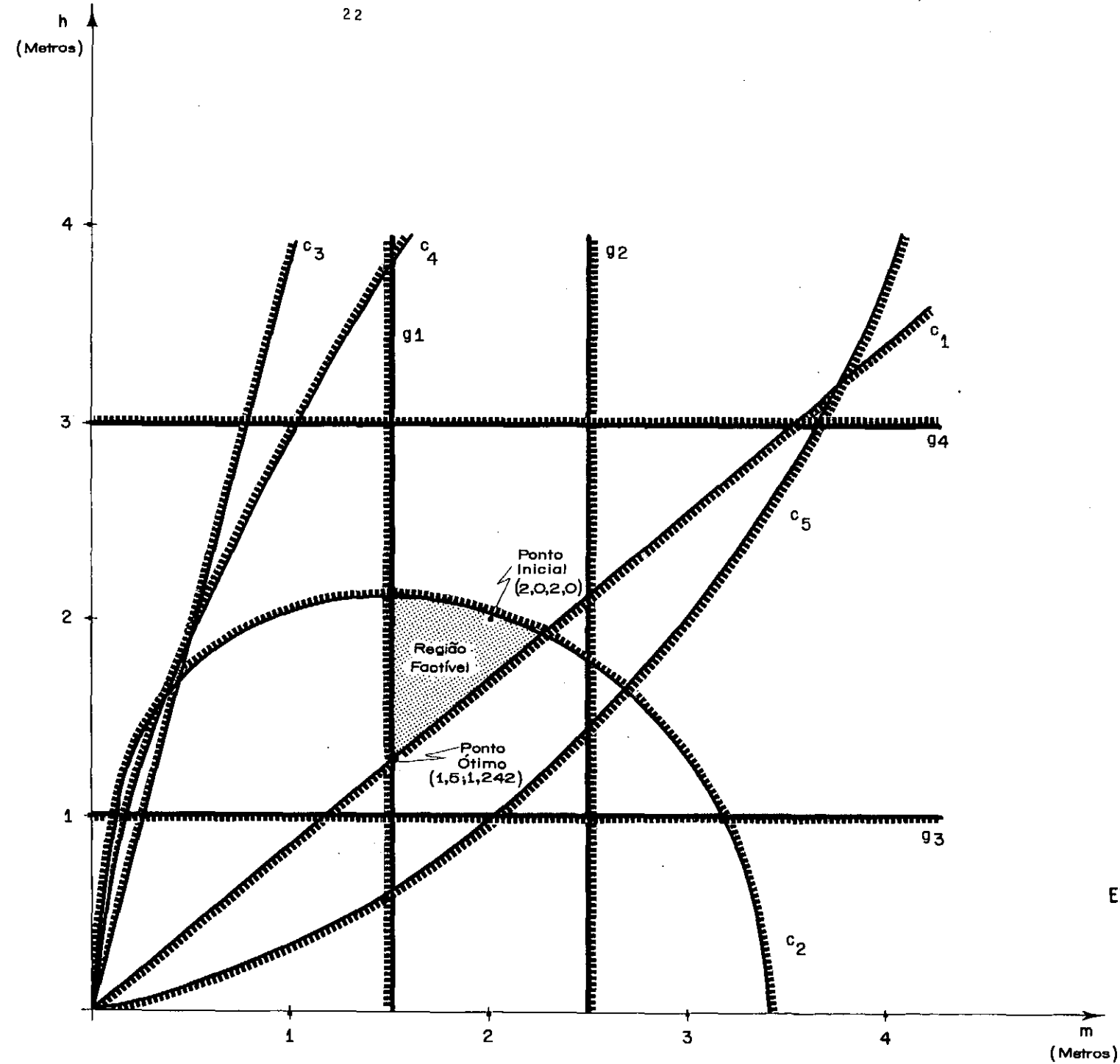
$$W(\underline{X}) = \rho^1 A^1 L^1 + \rho^2 A^2 L^2$$

Supondo as duas barras iguais:

$$W(\underline{X}) = 2\rho AL$$

Em função de  $m$  e  $h$  vem:

$$W(\underline{X}) = 2\rho A \sqrt{m^2 + h^2} \quad (\text{III-18})$$



No'	Coordenadas	
	X	Y
1	- m	o
2	m	o
3	o	h

EXEMPLO DE UM TRI-ARTICULADO SIMPLES  
(Figura III-1)

As restrições geométricas consideradas são:

$$m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$$

$$h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$$

Sob a forma geral, vem:

$$g_1(\underline{X}) = m_{\min} - m \leq 0$$

$$g_2(\underline{X}) = m - m_{\max} \leq 0$$

$$g_3(\underline{X}) = h_{\min} - h \leq 0$$

$$g_4(\underline{X}) = h - h_{\max} \leq 0$$

(III-19)

As restrições de comportamento incluídas são:

$\sigma_{c,adm}^1 \leq \sigma^{1,1} \leq \sigma_{t,adm}^1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{tensões geradas pelo} \\ \text{primeiro carregamento} \end{array} \right.$
$\sigma_{c,adm}^2 \leq \sigma^{2,1} \leq \sigma_{t,adm}^2$	
$\sigma_{c,adm}^1 \leq \sigma^{1,2} \leq \sigma_{t,adm}^1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{tensões geradas pelo} \\ \text{segundo carregamento} \end{array} \right.$
$\sigma_{c,adm}^2 \leq \sigma^{2,2} \leq \sigma_{t,adm}^2$	
$ u_x^1  \leq u_{x,max}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{deslocamentos gerados pe} \\ \text{lo primeiro carregamento} \end{array} \right.$
$ u_y^1  \leq u_{y,max}$	
$ u_x^2  \leq u_{x,max}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{deslocamentos gerados pe} \\ \text{lo segundo carregamento} \end{array} \right.$
$ u_y^2  \leq u_{y,max}$	

onde  $u_x$  e  $u_y$  são, respectivamente, os deslocamentos do nó livre

(de número 3) nas direções dos eixos.

Sob a forma geral, essas restrições serão escritas:

$$c_1(\underline{X}) = \sigma_{c,adm}^1 - \sigma^{1,1} \leq 0$$

$$c_2(\underline{X}) = \sigma^{1,1} - \sigma_{t,adm}^1 \leq 0$$

$$c_3(\underline{X}) = \sigma_{c,adm}^2 - \sigma^{2,1} \leq 0$$

$$c_4(\underline{X}) = \sigma^{2,1} - \sigma_{t,adm}^2 \leq 0$$

$$c_5(\underline{X}) = \sigma_{c,adm}^1 - \sigma^{1,2} \leq 0$$

$$c_6(\underline{X}) = \sigma^{1,2} - \sigma_{t,adm}^1 \leq 0$$

$$c_7(\underline{X}) = \sigma_{c,adm}^2 - \sigma^{2,2} \leq 0$$

$$c_8(\underline{X}) = \sigma^{2,2} - \sigma_{t,adm}^2 \leq 0$$

$$c_9(\underline{X}) = |u_x^1| - u_{x,max} \leq 0$$

$$c_{10}(\underline{X}) = |u_y^1| - u_{y,max} \leq 0$$

$$c_{11}(\underline{X}) = |u_x^2| - u_{x,max} \leq 0$$

$$c_{12}(\underline{X}) = |u_y^2| - u_{y,max} \leq 0$$

Poderemos reduzir o número de restrições de comportamento, se fizermos as seguintes considerações:

- As tensões nas barras geradas pelo primeiro carregamento serão iguais, e de valor positivo (trativas):  
 $\sigma^{1,1} = \sigma^{2,1}$ , a partir de agora denominadas  $\sigma_t^1$ .
- As tensões nas barras provenientes do segundo carregamento serão iguais em módulo e de sinais contrários

(uma de tração e a outra de compressão):  $\sigma^1, 2 = -\sigma^2, 2$ , a partir de agora denominadas, respectivamente,  $\sigma_t^2$  e  $\sigma_c^2$ .

- Como as barras são supostas iguais, adotaremos as mesmas tensões admissíveis para elas:  $\sigma_{t,adm}^1 = \sigma_{t,adm}^2$  e  $\sigma_{c,adm}^1 = \sigma_{c,adm}^2$ , a partir de agora denominados  $\sigma_{t,adm}$  e  $\sigma_{c,adm}$ .
- Os deslocamentos do nó 3 para os carregamentos considerados, se resumem a um vertical (e positivo) no primeiro caso e um horizontal (e positivo) no segundo, respectivamente denominados  $u_x$  e  $u_y$ , ou seja:

$$u_x^1 = 0 \quad u_y^1 = u_y \quad u_x^2 = u_x \quad u_y^2 = 0$$

Eliminando as restrições de comportamento desnecessárias, dentre as apresentadas, e renumerando as restantes temos:

$$c_1(\underline{X}) = \sigma_t^1 - \sigma_{t,adm} \leq 0$$

$$c_2(\underline{X}) = \sigma_{c,adm} - \sigma_c^2 \leq 0$$

$$c_3(\underline{X}) = \sigma_t^2 - \sigma_{t,adm} \leq 0 \quad (\text{III-20})$$

$$c_4(\underline{X}) = u_x - u_{x,max} \leq 0$$

$$c_5(\underline{X}) = u_y - u_{y,max} \leq 0$$

Em resumo, trata-se de um problema com duas variáveis sujeitas a nove restrições (quatro geométricas e cinco de comportamento). Considerando a simplicidade da estrutura, esses números podem parecer surpreendentes à primeira vista, mas, indi-



cam, apenas, a complexidade que os problemas de otimização assumem.

Os dados a serem considerados na resolução desse exemplo são:

Para as barras:

- Material constituinte: aço
- Área da seção transversal =  $0,0028\text{m}^2$
- Raio de giração mínimo =  $0,02\text{m}$
- Módulo de Young =  $21000000\text{ tf/m}^2$
- Peso específico =  $7,85\text{ tf/m}^3$

Para os carregamentos externos:

- $V = 50\text{tf}$
- $H = 20\text{tf}$

Para a configuração inicial:

- $m = 2,0\text{ metros}$
- $h = 2,0\text{ metros}$

Para as restrições geométricas:

- $m_{\min} = 1,5\text{ metros}$  e  $m_{\max} = 2,5\text{ metros}$
- $h_{\min} = 1,0\text{ metro}$  e  $h_{\max} = 3,0\text{ metros}$

Para as restrições de comportamento:

- $\sigma_{t,adm} = 14000\text{ tf/m}^2$
- $\sigma_{c,adm} = \begin{cases} -14000\text{ tf/m}^2 & \text{se } L^2 \leq 0,000352 R^2 E \\ -\left[\left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \times \frac{E}{2}\right]\text{tf/m}^2 & \text{se } L^2 > 0,000352 R^2 E \end{cases}$

onde  $R$ ,  $L$ ,  $E$  são, respectivamente o raio de giração mínimo, o

comprimento e o módulo de elasticidade longitudinal da barra

$$- u_{x,\max} = u_{y,\max} = 0,005 \text{ metros}$$

Vamos, agora, obter as fórmulas para as tensões nas barras e deslocamentos nodais, gerados pelos dois carregamentos considerados:

- Carga Vertical

Da figura III-1, temos de forma imediata:

$$\sigma_t^1 = \frac{V\sqrt{m^2+h^2}}{2Ah} \quad (\text{III-21})$$

O deslocamento vertical será:

$$u_y = \frac{V\sqrt{(m^2+h^2)^3}}{2EAh^2} \quad (\text{III-22})$$

- Carga Horizontal

Novamente da figura III-1 temos:

$$\sigma_t^2 = -\sigma_c^2 = \frac{H\sqrt{m^2+h^2}}{2Am} \quad (\text{III-23})$$

O deslocamento horizontal será:

$$u_x = \frac{H\sqrt{(m^2+h^2)^3}}{2AE m^2} \quad (\text{III-24})$$

Substituindo (III-21) e os valores de V, A e E na expressão da primeira restrição de comportamento temos:

$$c_1(\underline{X}) = \frac{\sqrt{m^2+h^2}}{h} - 1,568 \leq 0$$

Desenvolvendo, obtemos finalmente:

$$c_1(\underline{X}) = m - 1,2077h \leq 0$$

Procedendo de maneira análoga para as demais restrições, podemos reescrever o grupo de inequações (III-20):

$$c_1(\underline{X}) = m - 1,2077h \leq 0$$

$$c_2(\underline{X}) = h - \sqrt{5,1263 \sqrt[3]{m^2 - m^2}} \leq 0 \text{ para } m^2 + h^2 \geq 2,9609$$

$$c_3(\underline{X}) = h - 3,79m \leq 0$$

$$c_4(\underline{X}) = h - \sqrt{9,5257 \sqrt[3]{m^4 - m^2}} \leq 0$$

$$c_5(\underline{X}) = m - \sqrt{5,1714 \sqrt[3]{h^4 - h^2}} \leq 0$$

Na figura III-1 estão representados o espaço de projeto (no caso, a duas dimensões), as curvas correspondentes às várias restrições, tanto geométricas como de comportamento, e a região factível decorrente. Está indicado, também, o ponto inicial de coordenadas (2,0; 2,0), que se encontra na região factível, como era de se esperar.

Voltando à expressão (III-18), vamos tentar obter os lugares geométricos dos pontos do espaço de projeto, que correspondam a estruturas de mesmo peso, ou seja, as curvas de nível da função objetivo. Assim, fazendo  $W(\underline{X})$  assumir um valor constante  $C$ , e substituindo em (III-17) temos:

$$W(\underline{X}) = 2\rho A \sqrt{m^2 + h^2} = C$$

$$\sqrt{m^2 + h^2} = \frac{C}{2\rho A}$$

Logo,

$$m^2 + h^2 = \left(\frac{C}{2\rho A}\right)^2 = \text{constante}$$

que é a expressão de círculos concêntricos em relação à origem, de raio  $\left(\frac{C}{2\rho A}\right)^2$ . Assim, a medida que o peso decresce, o raio do

círculo diminua, e portanto, o ótimo estará sobre o ponto da região factível de menor distância em relação à origem. Voltando à figura III-1, podemos identificar de forma imediata o referido ponto, que se encontra na interseção das restrições  $g_1(\underline{X})$  e  $c_1(\underline{X})$ , ou seja:

$$m = 1,5 \text{ metros, de acordo com a restrição } g_1(\underline{X})$$

Da expressão de  $c_1(\underline{X})$  vem:

$$m - 1,2077h = 0 \quad \text{para } m = 1,5 \rightarrow h = 1,242 \text{ metros}$$

O peso inicial da estrutura é igual a 0,124tf e o final 0,086tf, com um ganho relativo de 31%.

Vamos resolver esse mesmo problema seguindo o procedimento apresentado no item III-1. Inicialmente, temos:

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} m \\ h \end{Bmatrix} \quad \text{sendo} \quad \underline{X}^1 = \begin{Bmatrix} 2,0 \\ 2,0 \end{Bmatrix} \quad \text{o ponto inicial}$$

$$W(\underline{X}) = 2\rho A \sqrt{m^2 + h^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial m} = 2\rho A \frac{m}{\sqrt{m^2 + h^2}} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial W}{\partial h} = 2\rho A \frac{h}{\sqrt{m^2 + h^2}} > 0$$

Para que as variações no vetor de projeto levem à redução de peso, devemos ter:

$$\frac{\partial W}{\partial m} \Delta m \leq 0 \rightarrow \Delta m \leq 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial h} \Delta h \leq 0 \rightarrow \Delta h \leq 0$$

Verificando as restrições de comportamento, para o ponto inicial, temos:

$$c_1(\underline{X}^1) = 2 - 1,2077 \times 2 = -0,415$$

$$c_2(\underline{X}^1) = 2 - \sqrt{5,1263 \sqrt[3]{2^2} - 2^2} = -0,034 \quad \text{sendo } m^2 + h^2 = 8$$

$$c_3(\underline{X}^1) = 2 - 3,79 \times 2 = -5,58$$

$$c_4(\underline{X}^1) = 2 - \sqrt{9,5257 \sqrt[3]{2^4} - 2^2} = -2,473$$

$$c_5(\underline{X}^1) = 2 - \sqrt{5,1714 \sqrt[3]{2^4} - 2^2} = -1,005$$

comprovando que o ponto inicial está na região factível.

Das restrições analisadas apenas  $c_2$  pode ser considerada ativa, representando perigo para o primeiro passo, como pode ser verificado na figura III-1.

Calculando a variação de  $c_2(\underline{X})$  em relação às componentes do vetor de projeto, temos:

$$\frac{\partial c_2}{\partial m} = - \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1,7088}{\sqrt[3]{m}} - 2m}{\sqrt{5,1263 \sqrt[3]{m^2} - m^2}}$$

Verificando o sinal do numerador da expressão, já que o denominador será sempre positivo, vem:

$$\frac{1,7088}{\sqrt[3]{m}} - 2m < 0 \rightarrow \sqrt[3]{m^4} > 0,8544$$

ou ainda  $m > 0,889$ .

Como  $m_{\min} = 1,5$ , isso sempre se verifica e o numerador é negativo, e portanto  $\frac{\partial c_2}{\partial m} > 0$ . Logo

$$\frac{\partial c_2}{\partial m} \Delta m \leq 0 \leftrightarrow \Delta m \leq 0$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial h} = 1 > 0$$

Logo,

$$\frac{\partial c_2}{\partial h} \Delta h \leq 0 \leftrightarrow \Delta h \leq 0$$

Assim, determinamos sinais (ambos negativos) das variações de  $m$  e  $h$ , considerando a redução da função objetivo e a verificação das restrições de comportamento.

Vamos proceder à primeira iteração do processo:

$$\underline{\nabla W}(\underline{X}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial m} \\ \frac{\partial W}{\partial h} \end{Bmatrix} = \frac{2\rho A}{\sqrt{m^2 + h^2}} \begin{Bmatrix} m \\ h \end{Bmatrix} = \frac{2\rho A}{\sqrt{m^2 + h^2}} \underline{X}$$

$$\underline{S}^1 = -\underline{\nabla W}(\underline{X}^1) = \begin{Bmatrix} -0,0311 \\ -0,0311 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{X}^2 = \underline{X}^1 + \beta^1 \underline{S}^1$$

Para atendermos às restrições geométricas, devemos ter:

$$2 - 0,0311\beta^1 \geq 1,5 \rightarrow \beta^1 \leq 16,077$$

$$2 - 0,0311\beta^1 \geq 1,0 \rightarrow \beta^1 \leq 32,154$$

Logo, adotando  $\beta^1 = 16,077$  vem:

$$\underline{X}^2 = \underline{X}^1 + \beta^1 \underline{S}^1 = \begin{Bmatrix} 2,0 \\ 2,0 \end{Bmatrix} + 16,077 \begin{Bmatrix} -0,0311 \\ -0,0311 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{Bmatrix}$$

Verificando as restrições de comportamento, temos:

$$c_1(\underline{X}^2) = 1,5 - 1,2077 \times 1,5 = -0,312$$

$$c_2(\underline{X}^2) = 1,5 - \sqrt{5,1263 \sqrt[3]{1,5^2} - 1,5^2} = -0,614 \text{ para } m^2 + h^2 = 4,5$$

$$c_3(\underline{X}^2) = 1,5 - 3,79 \times 1,5 = -4,185$$

$$c_4(\underline{X}^2) = 1,5 - \sqrt{9,5257 \sqrt[3]{1,5^4} - 1,5^2} = -2,256$$

$$c_5(\underline{X}^2) = 1,5 - \sqrt{5,1714 \sqrt[3]{1,5^4} - 1,5^2} = -1,075$$

e nenhuma restrição de comportamento estará ativa para a segunda iteração, procedida a seguir:

$$\underline{\nabla} W(\underline{X}^2) = \begin{Bmatrix} 0,03108 \\ 0,03108 \end{Bmatrix} \quad \alpha = \frac{|\underline{\nabla} W(\underline{X}^2)|^2}{|\underline{\nabla} W(\underline{X}^1)|^2} = 0,999$$

$$\underline{S}^2 = -\underline{\nabla} W(\underline{X}^2) + \alpha \underline{S}^1 = -\begin{Bmatrix} 0,03108 \\ 0,03108 \end{Bmatrix} + 0,999 \begin{Bmatrix} -0,0311 \\ -0,0311 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,0621 \\ -0,0621 \end{Bmatrix}$$

Para atendermos às restrições geométricas devemos ter:

$$\underline{X}^3 = \underline{X}^2 + \beta^2 \underline{S}^2$$

$$1,5 - 0,0621\beta^2 \geq 1,5 \rightarrow \beta^2 = 0$$

$$1,5 - 0,0621\beta^2 \geq 1,0 \rightarrow \beta^2 \leq 8,052$$

As inequações anteriores nos levariam a  $\beta^2 = 0$  e conseqüentemente  $\underline{X}^3 = \underline{X}^2$ . Há duas alternativas para podermos prosseguir no cálculo:

- Considerar  $\beta^2$  variável para cada componente de  $\underline{S}^2$
- Modificar o valor de  $\Delta m$ , anulando-o

Esse problema é um dos mais difíceis a resolver para que o método adotado seja eficiente. Na prática, a alternativa escolhida foi a primeira, como será mostrado no item III-3. Neste exemplo, entretanto, utilizaremos a segunda alternativa por

ser mais simples, obtendo resultados equivalentes ao do outro caminho. Façamos, então:

$$\underline{\tilde{S}}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,0621 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta^2 = 8,052$$

Logo,

$$\underline{\tilde{X}}^3 = \underline{\tilde{X}}^2 + \beta^2 \underline{\tilde{S}}^2 = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{Bmatrix} + 8,052 \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,0621 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$$

Verificando as restrições de comportamento temos:

$$c_1(\underline{\tilde{X}}^3) = 1,5 - 1,2077 \times 1 = 0,292$$

$$c_2(\underline{\tilde{X}}^3) = 1 - \sqrt{5,1263 \sqrt[3]{1,5^2} - 1,5^2} = -1,171 \text{ para } m^2 + h^2 = 3,25$$

$$c_3(\underline{\tilde{X}}^3) = 1 - 3,79 \times 1,5 = -4,685$$

$$c_4(\underline{\tilde{X}}^3) = 1 - \sqrt{9,5257 \sqrt[3]{1,5^4} - 1,5^2} = -2,756$$

$$c_5(\underline{\tilde{X}}^3) = 1,5 - \sqrt{5,1714 \sqrt[3]{1^4} - 1^2} = -0,542$$

e a primeira restrição foi violada, significando que o passo proposto foi muito extenso, ou seja  $\beta^2$  é muito grande.

Vamos reduzir  $\beta^2$  de modo que  $c_1$  não seja violada. Como o valor de  $m$  está fixo teremos:

$$1,5 - 1,2077h \leq 0 \rightarrow h \geq 1,242$$

$$h^3 = 1,5 - 0,0621\beta^2 \geq 1,242 \rightarrow \beta^2 \leq 4,154$$

$$\underline{\tilde{X}}^3 = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{Bmatrix} + 4,154 \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,0621 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 1,242 \end{Bmatrix}$$

Já sabemos que para este valor do vetor de projeto a restrição  $c_1(\underline{\tilde{X}}^3)$  é ativa e as demais não. Verificando os sinais



para novas variações de  $\underline{X}$ , temos:

$$\frac{\partial c_1}{\partial m} = 1 > 0$$

Como  $\Delta m = 0$  (restrição geométrica),  $\frac{\partial c_1}{\partial m} \Delta m = 0$  e a restrição estará sempre atendida.

$$\frac{\partial c_1}{\partial h} = -1,2077 < 0$$

Logo

$$\frac{\partial c_1}{\partial h} \Delta h \leq 0 \leftrightarrow \Delta h \geq 0$$

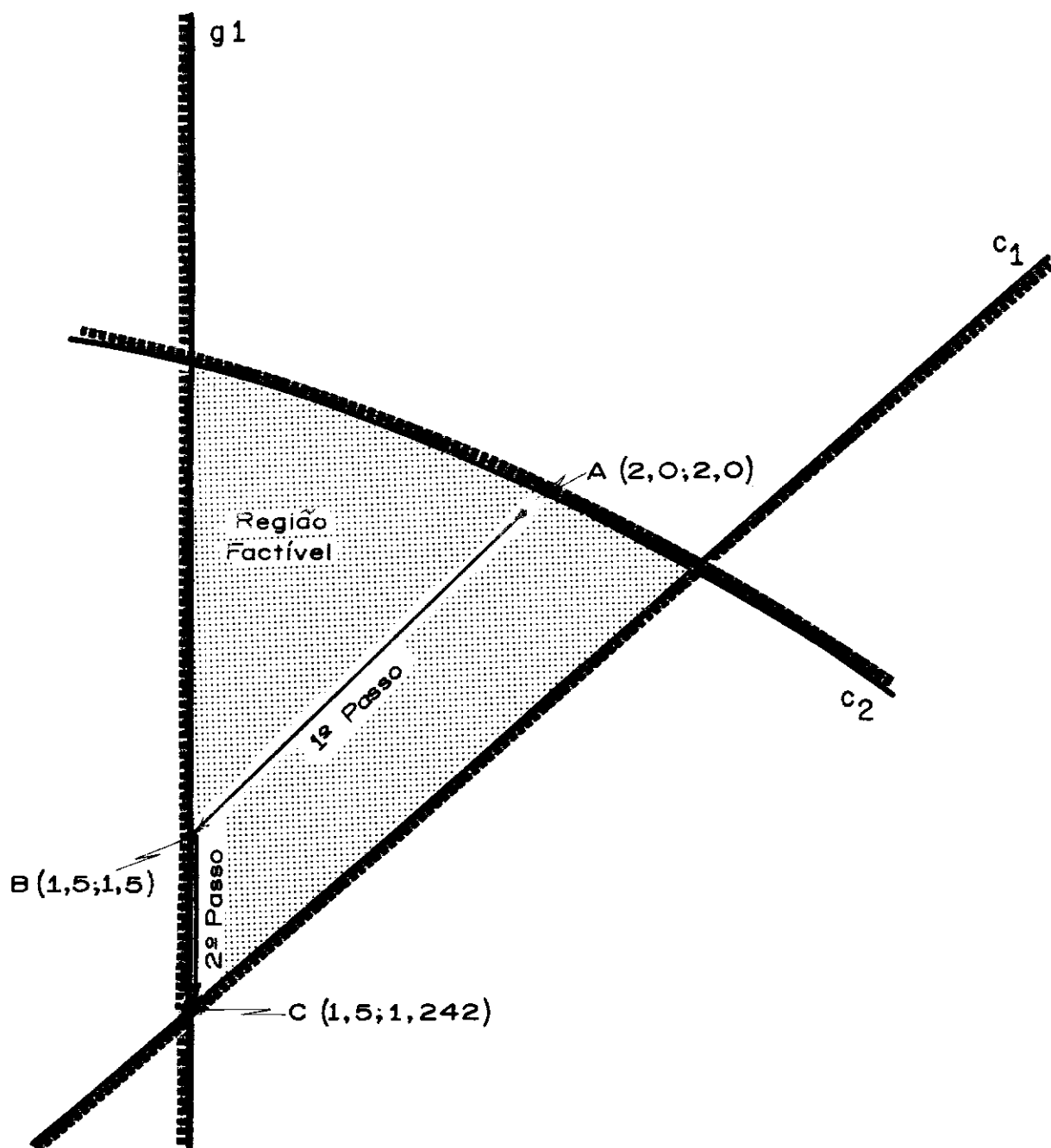
Porém, já vimos anteriormente que:

$$\frac{\partial W}{\partial h} \Delta h \leq 0 \leftrightarrow \Delta h \leq 0$$

Das duas equações acima, concluímos que  $\Delta h = 0$  e, portanto,  $\underline{S}^3 = \underline{0}$ , significando que atingimos o ótimo, como efetivamente podemos comprovar na figura III-1.

A figura III-2 representando a região factível do espaço de projeto, indica o caminho percorrido até atingirmos o ótimo. Por ela, podemos notar que, inicialmente, estávamos situados no ponto A, próximo à restrição  $c_2(\underline{X})$ . O primeiro passo nos levou diretamente ao ponto B, situado sobre a restrição  $g_1(\underline{X})$ . É importante observar, que a extensão desse passo é inco<sup>m</sup>um, e só foi possível tendo em vista as peculiaridades do problema analisado. Na prática, os passos dentro da região factível são de extensão pequena, conforme havia sido comentado no item III-1. A seguir, procedemos ao segundo passo, que pode ser

- A - Ponto Inicial  
 B - Resultado da 1ª Iteração  
 C - Resultado da 2ª Iteração  
 e Ponto Ótimo



CONVERGÊNCIA DO EXEMPLO DE UM TRI-ARTICULADO SIMPLES

(Figura III - 2)

visualizado como um "escorregar" sobre a superfície da restrição  $g_1(\underline{X})$ , até atingir a interseção desta com a restrição  $c_1(\underline{X})$  ou seja, o ponto C, que é o ponto ótimo.

### 3. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

Vamos, agora, discutir em detalhe o método apresentado no item III-1. Inicialmente, introduziremos o processo utilizado para determinar as tensões nas barras e deslocamentos nodais. Embora esse processo não tenha maior interesse teórico por se tratar de assunto bem conhecido, servirá para apresentar a notação utilizada, assim como para dar suporte às deduções subsequentes. A seguir, discutiremos o cálculo do vetor  $\underline{S}$ , analisaremos o coeficiente de ajuste do passo,  $\beta$ , e discutiremos a precisão do método apresentado.

#### 3.1. Análise da Estrutura

Por análise da estrutura entendemos o cálculo das tensões nas barras e dos deslocamentos nodais, gerados pelos vários carregamentos externos considerados. O método utilizado é o da rigidez direta, bastante difundido, e que será abordado de maneira breve.

Seja uma barra genérica  $i$  de uma treliça espacial. A contribuição desta barra para a matriz de rigidez global da estrutura será:

$$\underline{K}^i = (\underline{r}^i)^T \underline{K}^i \underline{r}^i \quad (\text{III-25})$$

onde  $\underline{r}^i$  é a matriz de rotação das coordenadas locais da barra pa

ra as globais da estrutura, e  $k^i$  é um coeficiente que mede a rigidez da barra.

$$\underline{r}^i = [\cos(\gamma_x^i); \cos(\gamma_y^i); \cos(\gamma_z^i)] \quad k^i = \frac{E^i A^i}{L^i} \quad (\text{III-26})$$

onde  $\gamma_x^i$ ,  $\gamma_y^i$  e  $\gamma_z^i$  são os ângulos diretores da barra  $i$  com relação, respectivamente, às coordenadas globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  da estrutura.

De (III-25) e (III-26) vem:

$$\underline{k}^i = \frac{E^i A^i}{L^i} \begin{bmatrix} \cos^2(\gamma_x^i) & \cos(\gamma_x^i)\cos(\gamma_y^i) & \cos(\gamma_x^i)\cos(\gamma_z^i) \\ \cos(\gamma_x^i)\cos(\gamma_y^i) & \cos^2(\gamma_y^i) & \cos(\gamma_y^i)\cos(\gamma_z^i) \\ \cos(\gamma_x^i)\cos(\gamma_z^i) & \cos(\gamma_y^i)\cos(\gamma_z^i) & \cos^2(\gamma_z^i) \end{bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

Se somarmos, de forma ordenada, as contribuições de cada barra da treliça, expressas por meio de suas matrizes de rigidez, obteremos a matriz de rigidez global da estrutura. Isso será feito da seguinte forma:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \dots & \underline{k}_{i1} & \dots & \underline{k}_{1NJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{k}_{i1} & \dots & \underline{k}_{ii} & \dots & \underline{k}_{iNJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{k}_{NJ1} & \dots & \underline{k}_{NJi} & \dots & \underline{k}_{NJNJ} \end{bmatrix} \quad (\text{III-28})$$

onde  $\underline{K}$  é a matriz de rigidez global da estrutura e  $NJ$  o número de nós.

$$\underline{k}_{ii} = \sum_{j=1}^N \underline{k}^j$$

onde  $N$  é o número total de barras concorrentes no nó  $i$ .

$$\underline{k}_{ij} = \underline{0}$$

se não existe barra ligando os nós  $i$  e  $j$ .

$$\underline{k}_{ij} = -\underline{k}^m$$

se a barra  $m$  liga os nós  $i$  e  $j$ .

Como a matriz  $\underline{K}$  é simétrica, só precisamos calcular e guardar os valores da matriz triangular superior (ou inferior).

A seguir, vamos obter o vetor de cargas:

$$\underline{p}^j = \left\{ \begin{array}{c} \underline{p}_1^j \\ \vdots \\ \underline{p}_i^j \\ \vdots \\ \underline{p}_{Nj}^j \end{array} \right\} \quad j=1, \dots, NEC \quad (III-29)$$

onde  $NEC$  é o número de carregamentos exteriores considerados.

O sub-vetor correspondente ao nó  $i$  será:

$$\underline{p}_i^j = \left\{ \begin{array}{c} p_{3i-2}^j \\ p_{3i-1}^j \\ p_{3i}^j \end{array} \right\}$$

onde  $p_{3i-2}^j$ ,  $p_{3i-1}^j$  e  $p_{3i}^j$  são as cargas, provenientes do carregamento externo  $j$ , que atuam sobre o nó  $i$ , respectivamente, nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  globais.

De maneira análoga definimos o vetor dos deslocamentos nodais:

$$\underline{u}^j = \left\{ \begin{matrix} u_1^j \\ \vdots \\ u_{Nj}^j \end{matrix} \right\} \quad (\text{III-30})$$

$$\underline{u}_i^j = \left\{ \begin{matrix} u_{3i-2}^j \\ u_{3i-1}^j \\ u_{3i}^j \end{matrix} \right\}$$

As equações de equilíbrio são:

$$\underline{K} \underline{u}^j = \underline{p}^j \quad j=1, \dots, \text{NEC} \quad (\text{III-31})$$

Entretanto, antes de resolvê-las, vamos introduzir as condições de contorno, de modo que o sistema fique determinado.

Seja  $i$  um n.º de apoio da treliça,  $i=1, \dots, \text{NAP}$ , onde  $\text{NAP}$  é o número total de apoios. Suponhamos que este n.º tenha parte dos seus deslocamentos com valores pré-fixados, sejam eles nulos ou não (recalques de apoio), e os restantes indeterminados (direções não apoiadas). Além disto, consideremos que estes deslocamentos sejam segundo direções não coincidentes com as coordenadas globais, que é o caso mais geral. Para introduzir estas condições de contorno no sistema, vamos proceder da seguinte forma:

Inicialmente, definamos duas matrizes de terceira ordem,  $\underline{C}_i$  e  $\underline{E}_i$ , respectivamente, iguais às matrizes unitária e nula. A seguir, anulemos os coeficientes diagonais da matriz  $\underline{C}_i$

que correspondam a deslocamento especificados do nó  $i$  e façamos igual a 1 os coeficientes correlatos da matriz  $E_i$ . Finalmente, formemos o sub-vetor  $\underline{\bar{u}}_i^j$ ,  $j=1, \dots, NEC$ , no qual os deslocamentos não especificados terão valor nulo, e os prē-estabelecidos, o valor que for fixado para eles.

Por exemplo, suponhamos que o nó  $i$  tenha as seguintes características:

- a direção  $x$  (local) é livre para se deslocar.
- a direção  $y$  (local) deve ter deslocamento nulo.
- a direção  $z$  (local) sofrerá um recalque de apoio igual a  $w$ , para o primeiro carregamento.

Logo teremos:

$$\underline{\bar{u}}_i^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{Bmatrix} \quad \underline{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{E}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De posse de  $\underline{\bar{u}}_i^j$ ,  $\underline{C}_i$  e  $\underline{E}_i$ , procederemos à introdução das condições de contorno, por meio das seguintes operações:

$$\left. \begin{aligned} \underline{p}_m^j &= \underline{p}_m^j - \underline{k}_{mi}(\underline{r}_i)^T \underline{\bar{u}}_i^j & j=1, \dots, NEC \\ \underline{k}_{mi} &= \underline{k}_{mi}(\underline{r}_i)^T \underline{C}_i \end{aligned} \right\} \quad m=1, \dots, i-1$$

$$\underline{p}_i^j = \underline{C}_i \underline{r}_i \left[ \underline{p}_i^j - \underline{k}_{ii}(\underline{r}_i)^T \underline{\bar{u}}_i^j \right] + \underline{\bar{u}}_i^j \quad j=1, \dots, NEC$$

$$\underline{k}_{ii} = \underline{C}_i \underline{r}_i \underline{k}_{ii}(\underline{r}_i)^T \underline{C}_i + \underline{E}_i$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{p}_m^j &= \underline{p}_m^j - (\underline{k}_{im})^T (\underline{r}_i)^T \underline{\bar{u}}_i^j & j=1, \dots, NEC \\ \underline{k}_{im} &= \underline{C}_i \underline{r}_i \underline{k}_{im} \end{aligned} \right\} \quad m=i+1, \dots, NJ$$

onde  $\underline{r}_i$  é matriz de rotação das direções dos deslocamentos do nó  $i$  em relação às coordenadas globais:

$$\underline{r}_i = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i^{11}) & \cos(\gamma_i^{21}) & \cos(\gamma_i^{31}) \\ \cos(\gamma_i^{12}) & \cos(\gamma_i^{22}) & \cos(\gamma_i^{32}) \\ \cos(\gamma_i^{13}) & \cos(\gamma_i^{23}) & \cos(\gamma_i^{33}) \end{bmatrix}$$

onde  $\gamma_i^{mn}$  representa o ângulo diretor da direção  $m$  do nó  $i$  em relação à coordenada global  $n$ .

A introdução das condições de contorno sob esta forma, foi apresentada por Ferrante [5] e demonstrou grande eficiência quando aplicada na prática.

Após a solução do sistema de equações (no presente trabalho efetuada pelo método da eliminação de Gauss), ou seja, determinados os vetores  $\underline{u}^j$ ,  $j=1, \dots, NEC$ , passamos diretamente ao cálculo das tensões nas barras, que será feito como se segue.

Seja  $i$  uma barra da treliça de nós  $m$  e  $n$ , sendo  $m$  o nó inicial e  $n$  o final. A tensão na barra  $i$  será:

$$\sigma^{i,j} = \frac{E^i}{L^i} \left[ \underline{r}^i (\underline{u}_n^j - \underline{u}_m^j) \right] \quad j=1, \dots, NEC \quad (III-32)$$

### 3.2. Cálculo da Variação do Vetor de Projeto

Vimos no item III-1 que o processo de redução da função objetivo é feito basicamente através da fórmula:

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + \beta^i \underline{s}^i$$



onde  $\underline{S}^i$  é a variação do vetor de projeto e  $\beta^i$  o coeficiente de ajuste do passo.

Ainda no mesmo item, mostramos que a determinação de  $\underline{S}^i$  deve ser feita criteriosamente, não só para que o processo de otimização seja eficiente, como também para garantir que as novas configurações geométricas das estruturas sejam factíveis.

Neste item, pretendemos discutir em detalhe os aspectos da determinação de  $\underline{S}^i$ , incluindo a dedução das várias fórmulas pertinentes.

Primeiramente, lembremos do item III-1 que a determinação da variação do vetor de projeto depende, basicamente, de três aspectos:

- Redução da função objetivo
- Verificação das restrições geométricas
- Verificação das restrições de comportamento

As restrições geométricas são de fácil tratamento, conforme pudemos observar no item III-1. De uma maneira geral, elas exigem, apenas, verificações diretas ou emprego de equações lineares simples, processo que já foi suficientemente discutido no referido item.

A redução de peso, a partir da variação de uma componente do vetor de projeto é obtida, basicamente, através da fórmula III-10. Vimos, também, que o cálculo do gradiente da função objetivo nos dará subsídios para a obtenção do módulo de  $\underline{S}^i$ . Assim, o nosso primeiro passo será instituir as fórmulas para calcular  $\nabla W(\underline{X})$ , e consequentemente  $\underline{S}$ .

Uma componente genérica do gradiente da função obje-

tivo será:

$$\frac{\partial W(\underline{X})}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{NM} \rho^i A^i \frac{\partial L^i}{\partial x_j} \quad j=1, \dots, 3NJ$$

No cálculo de  $\frac{\partial L^i}{\partial x_j}$  devemos verificar dois casos:

- A coordenada  $x_j$  é uma das coordenadas nodais dos extremos da barra  $i$ .
- A coordenada  $x_j$  não tem relação com os nós da barra  $i$

No primeiro caso, supondo  $m$  o nó inicial da barra  $i$  e  $n$  o nó final, teremos:

$$L^i = \sqrt{\sum_{r=1}^3 (x_{3(n-1)+r} - x_{3(m-1)+r})^2}$$

$$\frac{\partial L^i}{\partial x_j} = \frac{\eta_{mn} x_k^*}{L^i} \quad (\text{III-33})$$

onde  $\eta_{mn}$  é um coeficiente que é igual a 1 se  $x_j$  é uma das coordenadas do nó  $n$ , e -1 se for do nó  $m$ ;  $x_k^*$  é calculado por:

$$x_k^* = x_{3(n-1)+k} - x_{3(m-1)+k}$$

sendo que  $k$  terá para valor  $[j-3(n-1)]$  se  $x_j$  for uma das coordenadas do nó  $n$ , e  $[j-3(m-1)]$  se for do nó  $m$ .

A equação (III-33) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial L^i}{\partial x_j} = \eta_{mn} \cos \left[ \gamma_x^i (\text{ou } y, \text{ ou } z) \right] \quad (\text{III-34})$$

onde  $\gamma_x^i$  (ou  $y$ , ou  $z$ ) representa um dos ângulos diretores da barra  $i$ , conforme indicado em (III-26). A escolha da coordenada global a que se refere o coseno ( $x$  ou  $y$  ou  $z$ ) será feita através do valor de  $k$ .

O segundo caso apresentado fará com que:

$$\frac{\partial L^i}{\partial x_j} = 0$$

A verificação das restrições de comportamento proporcionará dois casos a analisar:

- Restrições referentes a deslocamentos
- Restrições referentes a tensões

No primeiro caso, teremos restrições do tipo:

$$c_m(\underline{X}) = |u_i^n| - u_{i,\max} \leq 0 \quad i=1, \dots, 3NJ; \quad n=1, \dots, NEC; \quad 1 \leq m \leq NRC$$

Derivando parcialmente em relação a  $x_j$  vem:

$$\frac{\partial c_m(\underline{X})}{\partial x_j} = \frac{\partial |u_i^n|}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \quad (\text{III-35})$$

onde  $\eta = 1$  se  $u_i^n \geq 0$  e  $\eta = -1$  se  $u_i^n < 0$ .

Lembremos que  $u_i^n$  é um elemento do vetor  $\underline{U}^n$ , que é calculado pelas equações (III-31). Derivando parcialmente essas equações em relação a  $x_j$ , vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x_j} \underline{U}^n + K \frac{\partial \underline{U}^n}{\partial x_j} &= \underline{0} \\ K \frac{\partial \underline{U}^n}{\partial x_j} &= - \frac{\partial K}{\partial x_j} \underline{U}^n \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{U}^n}{\partial x_j} = -\underline{K}^{-1} \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_j} \underline{U}^n \quad (\text{III-36})$$

A partir da fórmula anterior, calculamos  $\frac{\partial \underline{U}^n}{\partial x_j}$ , e levamos o elemento de ordem  $i$  na equação (III-35), como era nossa intenção.

Entretanto, na prática, a obtenção da matriz de rigidez global inversa deve ser evitada, pois acarreta um grande dispendio de memória de computador, o que, às vezes, torna-se proibitivo. Este é o único problema de monta para se utilizar a equação (III-36), já que o cálculo de  $\frac{\partial \underline{K}}{\partial x_j}$  não apresenta problemas (ver equações III-27 e III-28) e  $\underline{U}^n$  é obtido no processo de análise da estrutura (ver item III.3.1).

Para contornarmos esse problema lembremos que desejamos obter apenas o elemento de ordem  $i$  de  $\underline{U}^n$  e não o vetor inteiro. Para tanto, precisamos somente da linha de ordem  $i$  de  $\underline{K}^{-1}$  e não da matriz total. Isto pode ser conseguido da seguinte forma:

$$\text{Seja } \underline{P}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{elemento de ordem } i$$

Lembrando que  $\underline{K} \underline{U}^* = \underline{P}^*$ , ou ainda,  $\underline{U}^* = \underline{K}^{-1} \underline{P}^*$ . Devido à maneira como foi definido  $\underline{P}^*$  teremos  $\underline{U}^*$  igual à coluna de ordem  $i$  de  $\underline{K}^{-1}$  ou devido à simetria de  $\underline{K}$ ,  $\underline{U}^*$  será igual à linha de ordem  $i$  de  $\underline{K}^{-1}$ . Assim, definindo  $\underline{P}^*$  como anteriormente e resolvendo o sistema  $\underline{K} \underline{U}^* = \underline{P}^*$  pelo método da eliminação de Gauss

calculamos  $\underline{U}^*$  e levamos na equação (III-36), obtendo finalmente:

$$\frac{\partial \underline{u}_i^n}{\partial x_j} = -(\underline{U}^*)^T \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_j} \underline{U}^n \quad (\text{III-37})$$

As restrições referentes a tensões podem apresentar dois aspectos diferentes:

- As tensões admissíveis são constantes ao longo do processo, caso da tração.
- As tensões admissíveis são variáveis ao longo do processo, caso da compressão considerando a flambagem.

No caso de tensões admissíveis constantes teremos restrições do tipo:

$$c_m(\underline{X}) = \sigma^{i,n} - \sigma_{t,adm}^i \leq 0 \quad i=1, \dots, NM; \quad n=1, \dots, NEC; \quad 1 \leq m \leq NRC$$

Derivando parcialmente em relação a  $x_j$  vem:

$$\frac{\partial c_m(\underline{X})}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma^{i,n}}{\partial x_j} \quad (\text{III-38})$$

Chamando de a e b, respectivamente, os nós inicial e final da barra i, e levando (III-32) na equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{i,n}}{\partial x_j} = & - \frac{E^i}{(L^i)^2} \times \frac{\partial L^i}{\partial x_j} \left[ \underline{r}^i (\underline{u}_b^n - \underline{u}_a^n) \right] + \\ & + \frac{E^i}{L^i} \left[ \frac{\partial \underline{r}^i}{\partial x_j} (\underline{u}_b^n - \underline{u}_a^n) + \underline{r}^i \left( \frac{\partial \underline{u}_b^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \underline{u}_a^n}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma^{i,n}}{\partial x_j} = \frac{E^i}{L^i} \left[ \frac{\partial r^i}{\partial x_j} (\underline{u}_b^n - \underline{u}_a^n) + r^i \left( \frac{\partial \underline{u}_b^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \underline{u}_a^n}{\partial x_j} \right) - \frac{\sigma^{i,n}}{E^i} \times \frac{\partial L^i}{\partial x_j} \right] \quad (\text{III-39})$$

A expressão acima é de cálculo imediato, a partir das fórmulas instituídas anteriormente, conforme está exposto a seguir:

- O cálculo de  $\frac{\partial r^i}{\partial x_j}$  é feito diretamente a partir da definição da matriz de rotação da barra  $i$  e da equação (III-34).
- Para obter  $\frac{\partial \underline{u}_b^n}{\partial x_j}$  e  $\frac{\partial \underline{u}_a^n}{\partial x_j}$ , devemos calcular as derivadas parciais das componentes dos sub-vetores  $\underline{u}_b^n$  e  $\underline{u}_a^n$  o que será feito a partir da expressão (III-37).
- O valor de  $\frac{\partial L^i}{\partial x_j}$  será determinado diretamente da expressão (III-34).
- Finalmente, os valores de  $E^i$ ,  $L^i$ ,  $r^i$ ,  $\underline{u}_b^n$ ,  $\underline{u}_a^n$ ,  $\sigma^{i,n}$  são disponíveis, não requerendo maiores considerações

Quando as tensões admissíveis forem variáveis, teremos restrições do tipo:

$$c_m(\underline{X}) = \sigma_{c,adm}^i - \sigma^{i,n} \leq 0 \quad i=1, \dots, NM; \quad n=1, \dots, NEC; \quad 1 \leq m \leq NRC$$

Derivando parcialmente em relação a  $x_j$  vem:

$$\frac{\partial c_m(\underline{X})}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{c,adm}^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma^{i,n}}{\partial x_j}$$

onde  $\frac{\partial \sigma_{c,adm}^i}{\partial x_j}$  não é obrigatoriamente nulo, já que  $\sigma_{c,adm}^i$  também é uma função do vetor de projeto  $\underline{x}$  e  $\frac{\partial \sigma_{c,adm}^i}{\partial x_j}$  é calculado pela expressão (III-39).

A tensão de compressão admissível, com consideração da flambagem, foi assumida como uma função do seguinte aspecto:

$$|\sigma_{c,adm}^i| \leq \begin{cases} \sigma_c^* \\ \frac{1}{2} \times \left( \frac{\pi R^i}{L^i} \right)^2 \times E^i \end{cases} \quad (III-40)$$

onde  $\sigma_c^*$  é um valor de referência, considerado como a tensão admissível à compressão para peças curtas e  $R^i$  é o raio de giração mínimo da barra  $i$ .

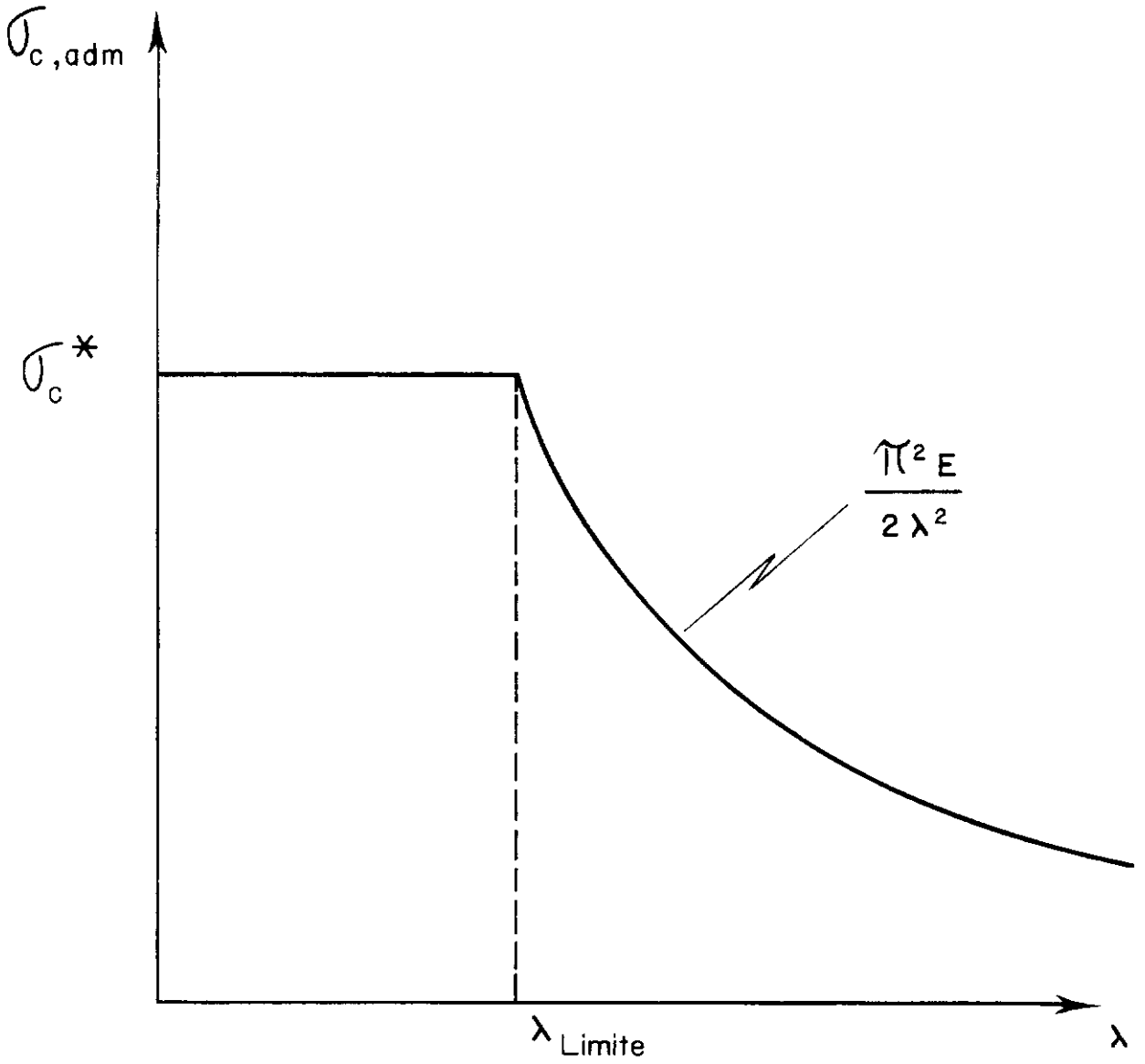
A segunda expressão para  $\sigma_{c,adm}^i$  é a conhecida fórmula de Euler para a tensão crítica de flambagem, minorada por um coeficiente de segurança igual a 2.

A consideração da flambagem, como apresentado, se aproxima do tratamento dado ao problema por várias normas internacionais, sem entretanto se fixar a uma delas.

A figura III-3 demonstra a variação da tensão de flambagem com o índice de esbeltez da barra  $\lambda^i$ , que é calculado pela fórmula  $\lambda^i = \frac{L^i}{R^i}$ .

Reescrevendo (III-40) em função do índice de esbeltez temos:

$$\sigma_{c,adm}^i = \begin{cases} -\sigma_c^* & \text{para } \lambda \leq \lambda_{limite} \\ -\frac{\pi^2 E^i}{2(\lambda^i)^2} & \text{para } \lambda > \lambda_{limite} \end{cases}$$



$$\lambda_{Limite} = \pi \sqrt{\frac{E}{2 \sigma_c^*}}$$

$$\sigma_{c,adm} = \begin{cases} -\sigma_c^* & \lambda \leq \lambda_{Limite} \\ -\frac{E}{2} \times \left( \frac{\pi R}{L} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{2 \lambda^2} & \lambda > \lambda_{Limite} \end{cases}$$



onde  $\lambda_{\text{limite}} = \pi \sqrt{\frac{E^i}{2\sigma_c^*}}$ .

Derivando parcialmente em relação a  $x_j$  vem:

$$\frac{\partial \sigma_{c,adm}^i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda \leq \lambda_{\text{limite}} \\ \frac{\pi^2 E^i}{(\lambda^i)^3} \times \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_j} & \text{para } \lambda > \lambda_{\text{limite}} \end{cases}$$

ou ainda, lembrando da definição de  $\lambda^i$ :

$$\frac{\partial \sigma_{c,adm}^i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda \leq \lambda_{\text{limite}} \\ \frac{\pi^2 E^i}{R^i (\lambda^i)^3} \times \frac{\partial L^i}{\partial x_j} & \text{para } \lambda > \lambda_{\text{limite}} \end{cases}$$

que pode ser obtido com facilidade, através do emprego da equação (III-34).

### 3.3. Cálculo do Coeficiente de Ajuste do Passo

Vimos no item III-2 a importância do coeficiente de ajuste do passo, bem como as dificuldades que surgem no seu cálculo. Para melhor exemplificar esses problemas e permitir o entendimento da solução adotada, vamos voltar ao tri-articulado que foi apresentado no item supra-citado.

Suponhamos que o ponto inicial escolhido tivesse as seguintes características:  $m = 1,5$  metros e  $h = 2,0$  metros, mantidos os demais dados.

O espaço de desenho e a região factível decorrente serão os mesmos, já apresentados nas figuras III-1 e III-2 e que

se encontram repetidos na figura III-4. Nesta figura, plotamos o ponto A, que é o ponto inicial, com coordenadas (1,5; 2,0), e verificamos que o mesmo se encontra sobre a restrição geométrica  $g_1(\underline{X})$ . Lembrando que  $\underline{S}^1 = -\underline{\nabla}W(\underline{X}^1)$  temos:

$$\underline{S}^1 = -\underline{\nabla}W(\underline{X}^1) = \begin{Bmatrix} -0,0264 \\ -0,0352 \end{Bmatrix}$$

O ângulo diretor de  $\underline{S}^1$  com o eixo m será:

$$\gamma = \arccos \left( - \frac{0,0264}{\sqrt{0,0264^2 + 0,0352^2}} \right) \cong 233^{\circ} 7' 48''$$

Indicando na figura III-4 a direção de  $\underline{S}^1$  e lembrando que esta direção é a escolhida para o primeiro passo, verificamos que estamos impedidos de caminhar, pois iríamos violar  $g_1(\underline{X})$ , o que acarretaria  $\beta^1 = 0$  e  $\underline{X}^2 = \underline{X}^1$ .

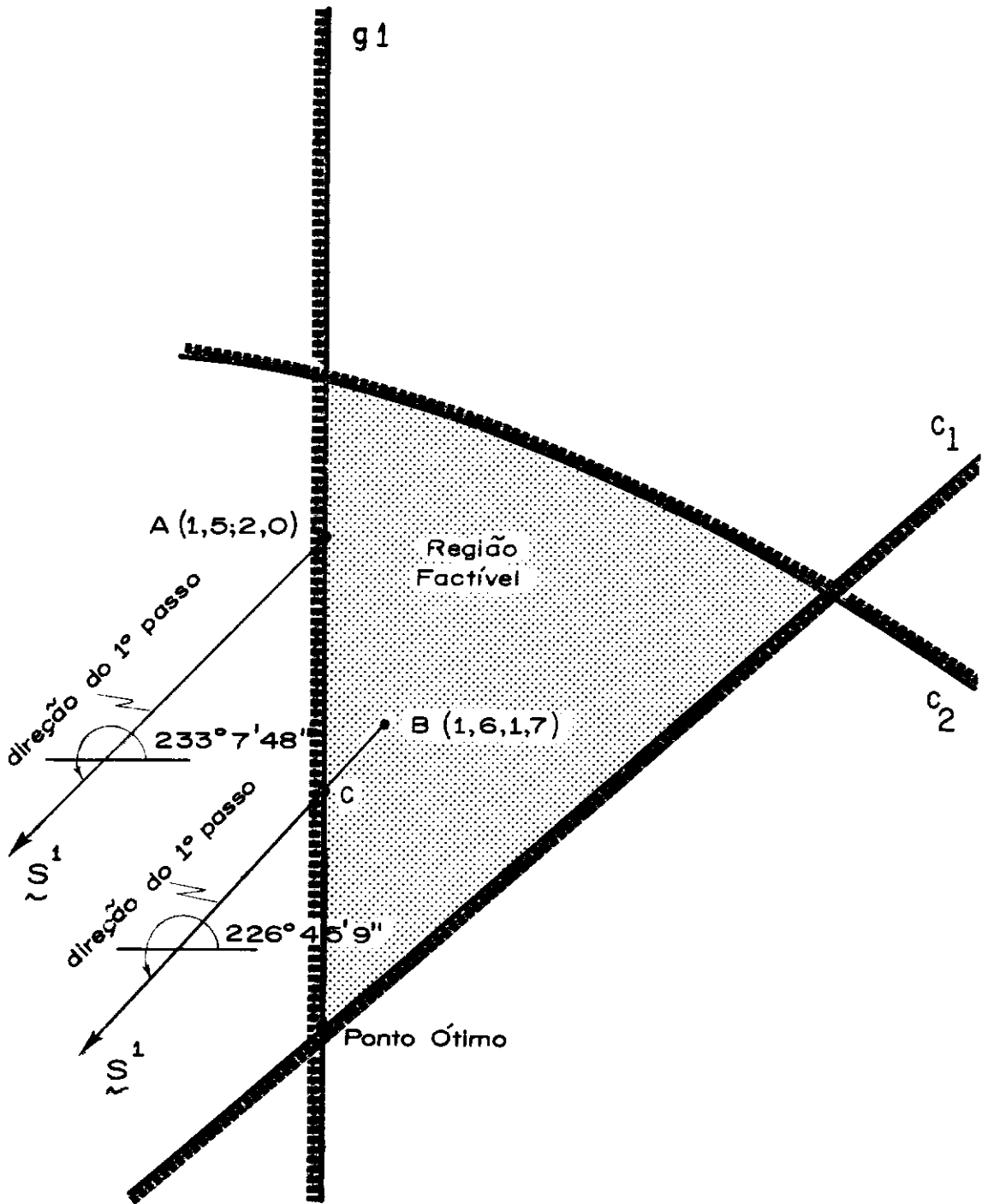
Um problema semelhante, porém não tão grave, aconteceria se o ponto B, de coordenadas (1,6; 1,7) fosse escolhido para ponto inicial.

$$\underline{S}^1 = -\underline{\nabla}W(\underline{X}^1) = \begin{Bmatrix} -0,0301 \\ -0,0320 \end{Bmatrix}$$

$$\gamma = \arccos \left( - \frac{0,0301}{\sqrt{0,0301^2 + 0,0320^2}} \right) \cong 226^{\circ} 45' 9''$$

Plotando na figura III-4 o ponto B e a direção de  $\underline{S}^1$  verificamos que poderíamos dar um pequeno passo, de módulo  $\overline{BC}$  (na figura), antes de violarmos a restrição  $g_1(\underline{X})$ .

Os problemas apresentados são altamente inconvenien-



tes, pois tornariam o processo de otimização totalmente ineficiente, em situações como as dos pontos A e B da figura III-4.

Existem dois tipos de solução para essas situações:

- Modificar o vetor  $\underline{S}$ , tornando nulas certas componentes
- Considerar o coeficiente de ajuste do passo variável para cada componente de  $\underline{S}$ .

A primeira solução, que foi adotada na resolução do exemplo do item II-2, não é muito eficiente para o caso geral. Por exemplo, verifiquemos a situação do ponto B da figura III-4. Anulando o valor de  $\Delta m$ , apesar de obtermos a consecução de um passo maior do que aquele previsto inicialmente, teríamos uma perda de qualidade da iteração, por não podermos reduzir o valor da coordenada  $m$ .

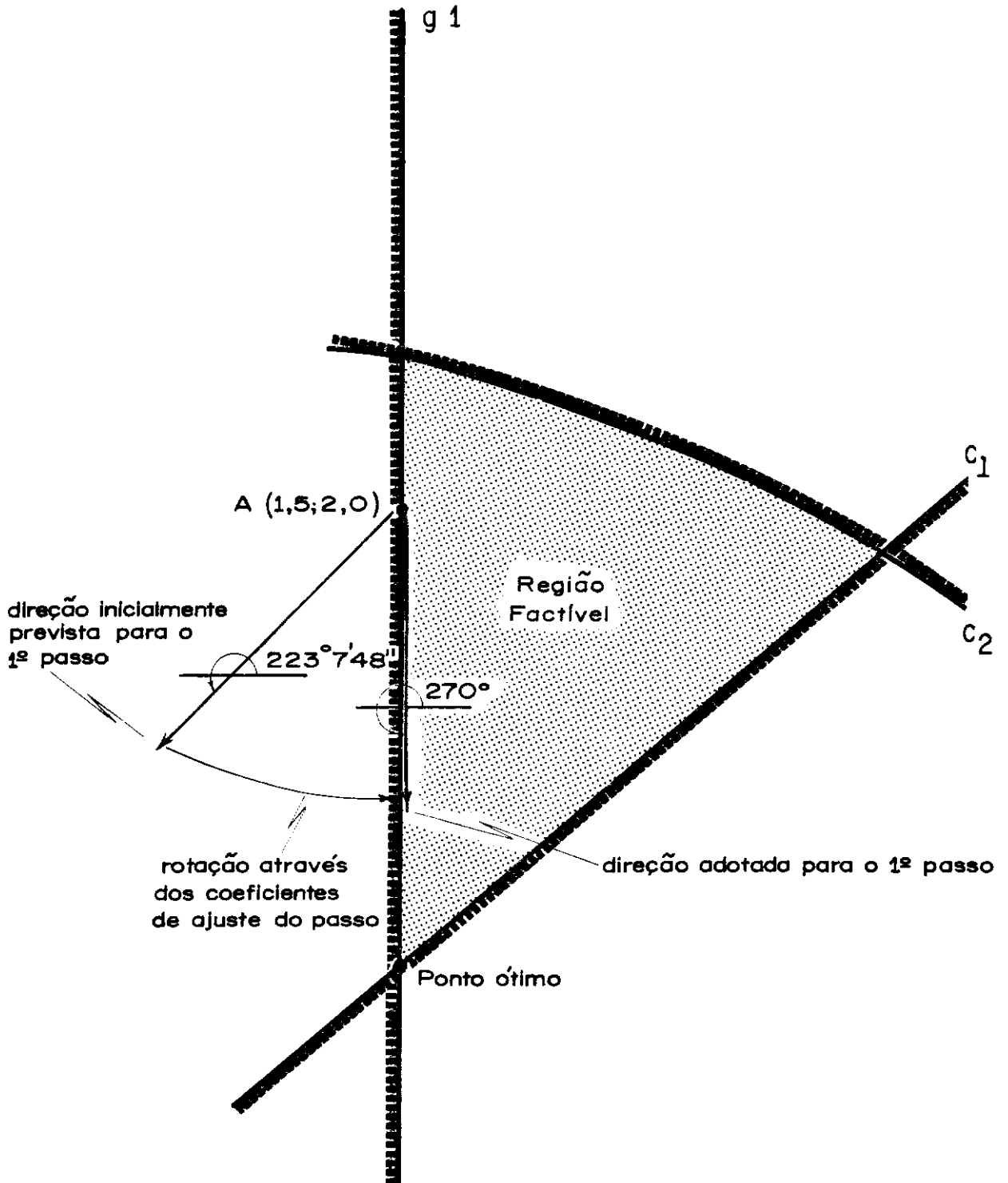
A solução adotada foi a segunda, que apresenta resultados igualmente eficientes para todos os casos que, geralmente ocorrem na prática, e que pode ser representada pelas expressões:

$$x_j^{i+1} = x_j^i + \beta_j^i s_j^i \quad (\text{III-41})$$

onde  $j=1, \dots, 3NJ$  e  $i$  é o número da iteração.

Essas expressões significam que procuraremos reduzir o peso, deslocando-nos no espaço de projeto em uma direção diferente da originalmente especificada (ou seja, aquela indicada pelo vetor  $\underline{S}$ ). Isso será feito através de coeficientes variáveis,  $\beta_j$ , aplicados sobre os elementos de  $\underline{S}$ , gerando como que uma rotação desse vetor, conforme pode ser visualizado na figura III-5.

Reescrevendo as expressões do método de Fletcher e



ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA  
(Figura III - 5)

Reeves, aplicando o conceito de coeficientes de ajuste do passo variáveis, temos:

- Primeira Iteração

$\underline{x}^1$  = valor inicial do vetor de projeto

$$\underline{s}^1 = -\underline{\nabla}W(\underline{x}^1) \quad (\text{III-42})$$

$$x_j^2 = x_j^1 + \beta_j^1 s_j^1 \quad j=1, \dots, 3NJ$$

- I-ésima Iteração

$$\underline{s}^i = -\underline{\nabla}W(\underline{x}^i) + \alpha \underline{s}^{i-1}$$

$$\alpha = \frac{|\underline{\nabla}W(\underline{x}^i)|^2}{|\underline{\nabla}W(\underline{x}^{i-1})|^2} \quad (\text{III-43})$$

$$x_j^{i+1} = x_j^i + \beta_j^i s_j^i \quad j=1, \dots, 3NJ$$

O cálculo dos coeficientes de ajuste do passo é realizado da seguinte forma:

1.<sup>a</sup> Fase: Inicialmente, tentamos realizar a iteração com os coeficientes constantes, visando aproveitar a direção teoricamente mais favorável, ou seja, aquela indicada pelo método de Fletcher e Reeves e representada pelo vetor  $\underline{s}$ . Assim, fazemos:

$$\beta_1^i = \beta_2^i = \dots = \beta_{3NJ}^i = \beta = \frac{0,1}{2^i} \cdot \frac{|\underline{x}^i|}{|\underline{s}^i|} \quad (\text{III-44})$$

onde  $i$  é o número da iteração.

Essa expressão, como de sorte todas as outras utilizadas no cálculo dos coeficientes de ajuste do passo é empírica, sendo o fruto de testes realizados com o

programa AUTOFORM. Ela indica o valor mínimo de  $\beta$ , para o qual o deslocamento no espaço de projeto na direção de  $\underline{S}$  leva a um ganho de peso significativo. Valores de  $\beta$  inferiores não devem ser tentados sob pena de termos uma convergência extremamente lenta. Assim, fazemos  $\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + \beta \underline{S}^i$  e verificamos se alguma restrição é violada. Podemos ter duas hipóteses a considerar:

- a) Nenhuma restrição foi violada e podemos caminhar na direção de  $\underline{S}$ . Basta, então, pesquisar valores maiores de  $\beta$  do que o obtido por (III-44), para aproveitar ao máximo o passo nessa direção.
- b) Alguma restrição foi violada e nesse caso temos que adotar coeficientes de ajuste do passo variáveis, cujo cálculo está indicado na 2.<sup>a</sup> Fase. Essa hipótese é que ocorre na grande maioria dos casos pois em problemas com um número relativamente grande de restrições, dificilmente podemos caminhar na direção de  $\underline{S}$ . Assim, a hipótese de  $\beta$  constante foi apresentada e discutida para complementar o desenvolvimento teórico do método, bem como, facilitar o seu entendimento, embora não seja normalmente utilizada.

2.<sup>a</sup> Fase: Verificada a necessidade de coeficientes de ajuste do passo variáveis, esses serão calculados inicialmente da seguinte forma:

$$\beta_j^i = \frac{0,2}{2^i} \cdot \frac{|\underline{x}_j^i|}{\bar{x}_j} \quad (\text{III-45})$$

onde  $i$  é o número da iteração e  $\bar{x}_j$  será calculado pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}\bar{x}_j &= x_j^i - x_{j,\min} & \text{se } s_j \leq 0 \\ \bar{x}_j &= x_{j,\max} - x_j^i & \text{se } s_j > 0\end{aligned}\tag{III-46}$$

Se tivermos, por exemplo,  $x_j^i = x_{j,\min}$  e  $s < 0$ , não poderemos adotar a fórmula (III-45). Entretanto, lembrando que  $x_j^i$  já atingiu o seu valor mínimo e não pode ser reduzido, fazemos  $\beta_j^i = 0$ .

Com os valores de  $\beta_j^i$  calculados como exposto, verificamos se alguma restrição é violada. Podemos ter duas hipóteses a considerar:

- a) Nenhuma restrição é violada. Nesse caso, aumentamos de uma certa porcentagem fixa os valores de  $\beta_j^i$ , testamos novamente e assim por diante, até violar alguma restrição. Se durante o processo de incremento de  $\beta_j^i$ , o novo valor da coordenada  $x_j$  atingir um valor limite ( $x_{j,\min}$  por exemplo),  $\beta_j^i$  é fixado nesse valor e impedido de aumentar.
- b) Alguma restrição é violada. Devemos, então, reduzir  $\beta_j^i$  de uma certa porcentagem fixa e testar novamente, até entrarmos de novo na região factível. Se durante esse processo algum dos  $\beta_j$  se anular, ele será mantido constante nesse valor, enquanto os demais continuarão a variar.

As porcentagens de aumento e redução adotadas são de 50%, valor escolhido para evitar um grande número de pesquisas de  $\beta_j$  por iteração.



### 3.4. Precisão dos Resultados Obtidos

O método de otimização utilizado tem caráter aproximado, conforme discutido a seguir.

A introdução de coeficientes de ajuste do passo variáveis, modificando a direção do vetor  $\underline{S}$ , não chega a prejudicar a convergência do método, porém, não nos permitirá mais garantir a obtenção do ótimo global, ou mesmo local, ao final do processo, embora às vezes isso possa ocorrer (ver exemplo 1). Assim ao utilizar o método proposto, teremos certeza de obter apenas uma estrutura final cujo projeto é melhor que o da inicial. Entretanto, os resultados obtidos nos exemplos, aliados à eficiência demonstrada pelo método, em termos do esforço computacional requerido, nos permitem concluir pela validade do mesmo, para fins de utilização prática.

C A P Í T U L O   I V

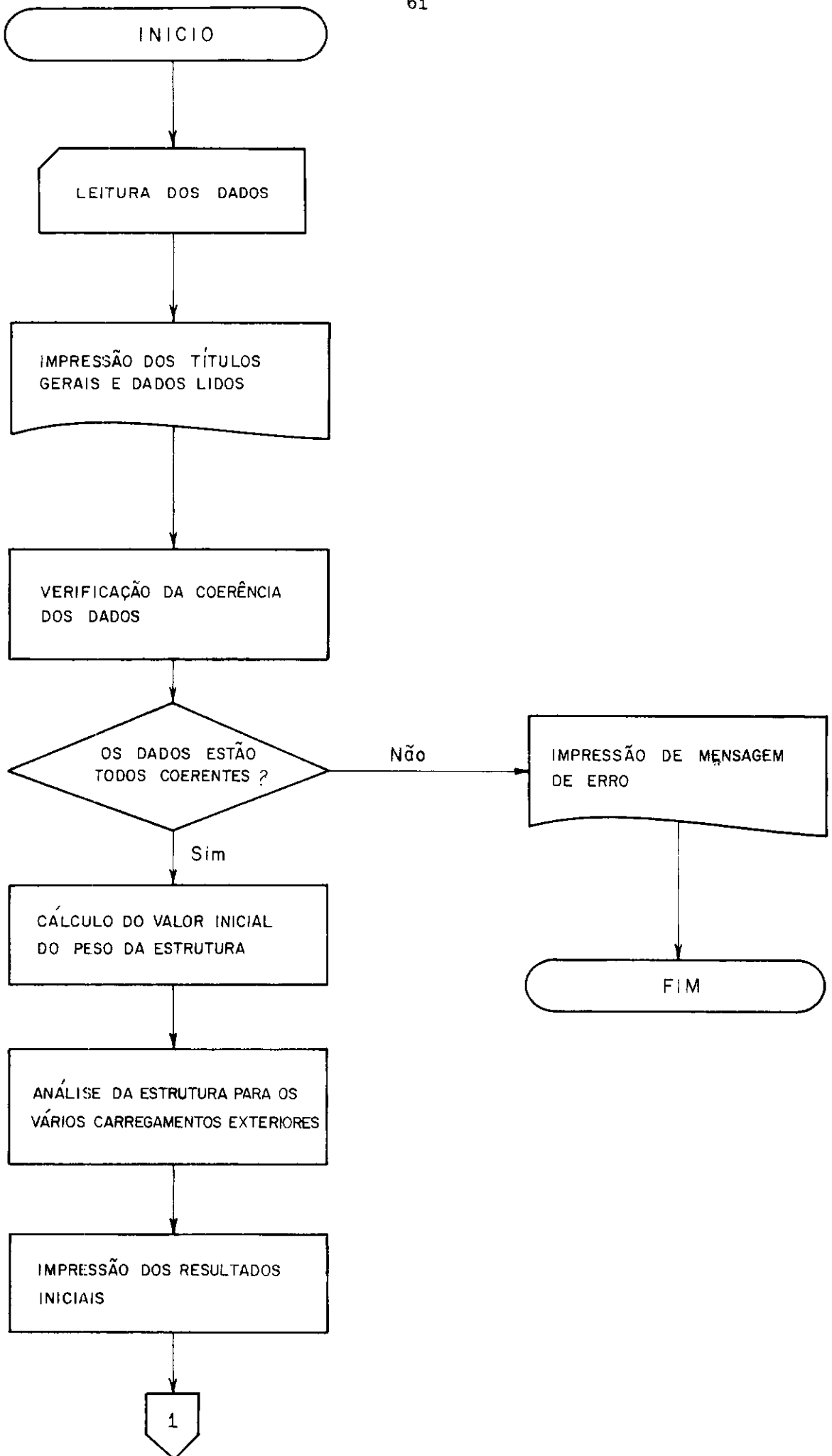
FLUXOGRAMA GERAL DO PROGRAMA AUTOFORM

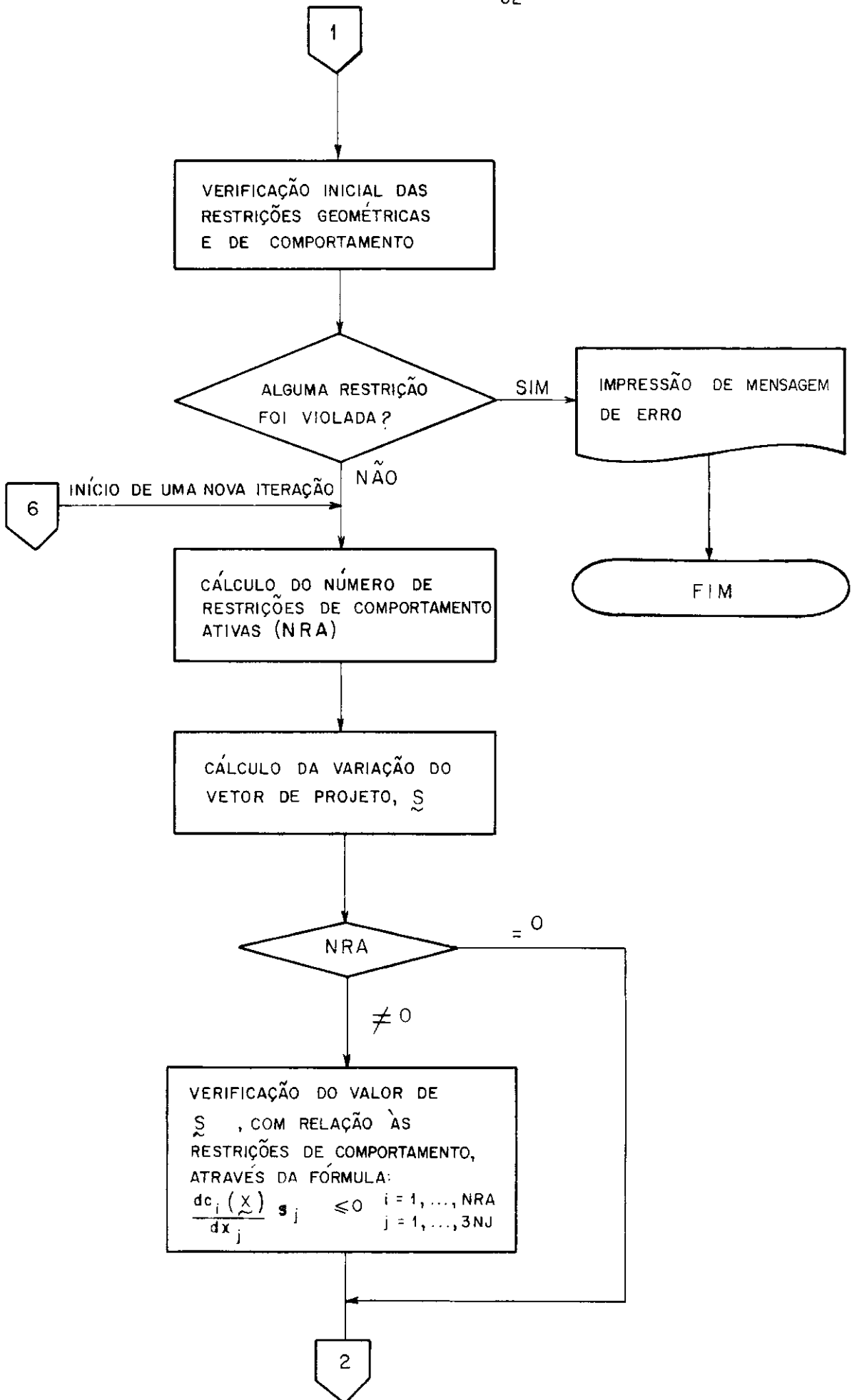
Apresentamos, a seguir, o fluxograma do programa AUTO  
FORM, desenvolvido a partir do método de otimização analisado no  
Capítulo III.

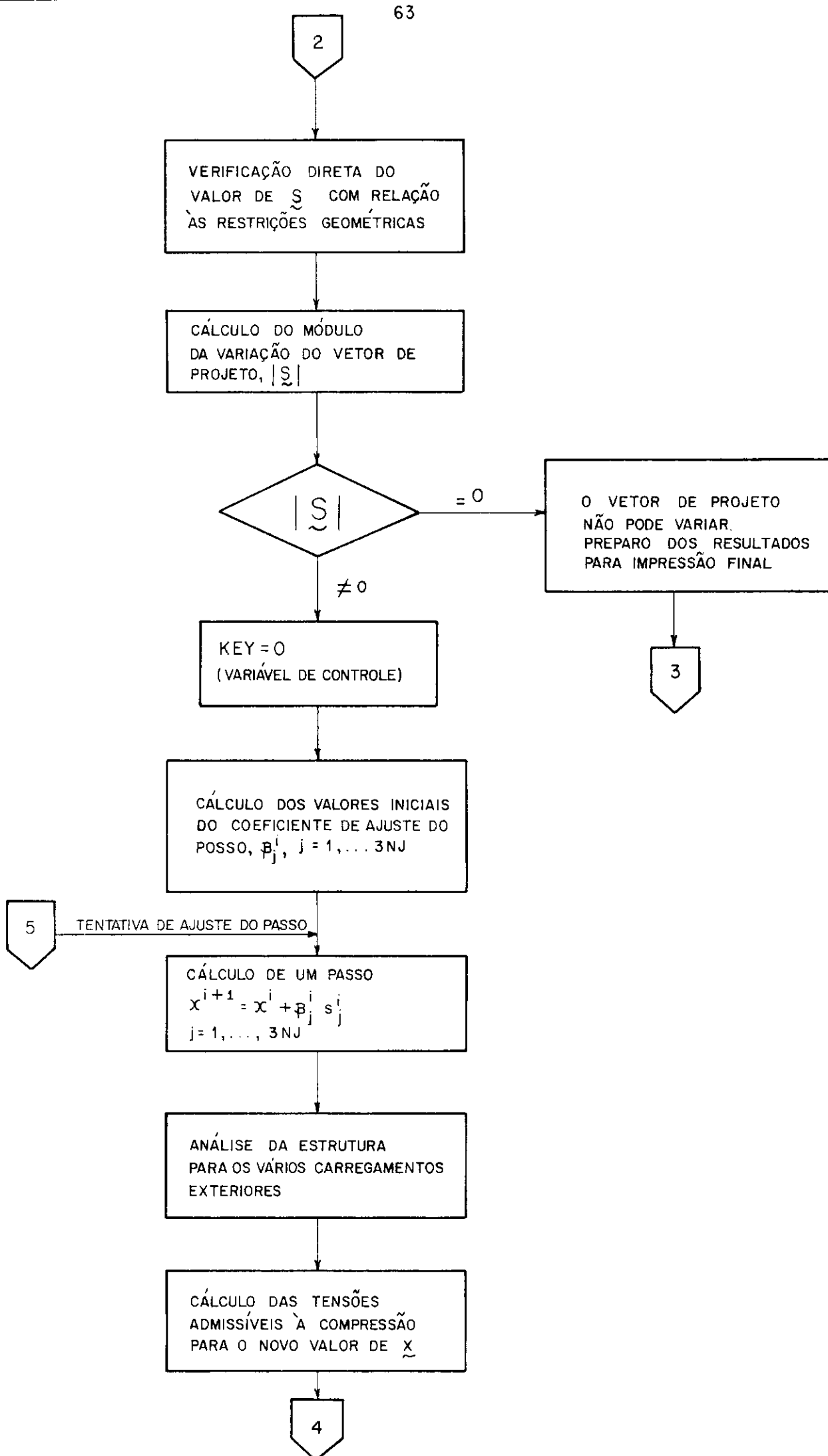
O programa possui as seguintes características gerais:

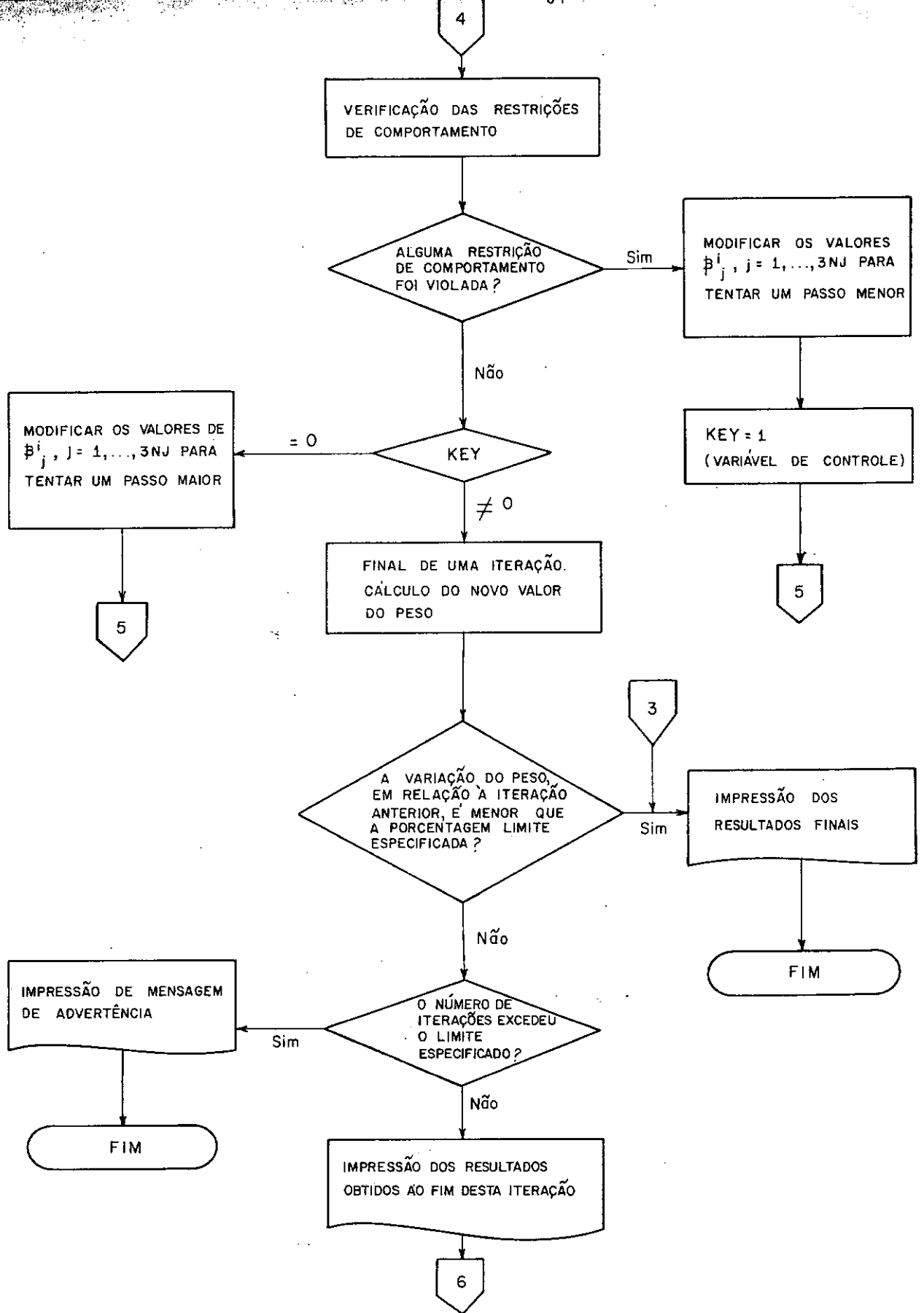
- Linguagem: FORTRAN IV
- Memória requerida: 25K palavras
- Limitações:
  - Número de variáveis de projeto (coordenadas nodais)  
 $\leq 300$
  - Número de barras  $\leq 200$
  - Número de carregamentos exteriores  $\leq 3$
  - Número de nós para apoio  $\leq 100$
  - Número de restrições geométricas  $\leq 1100$
  - Número de restrições de comportamento  $\leq 2100$

O computador utilizado foi o Burroughs 6700 do Núcleo  
de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janei  
ro.









C A P Í T U L O V

EXEMPLOS



## 1. EXEMPLE 1

## 1.1. Apresentação do Problema

Vamos resolver, através do programa AUTOFORM o mesmo tri-arculado apresentado no item III-2 e que se encontra indicado na figura III-1. Tomaremos dois diferentes pontos de partida a saber:

- 1º Ponto (Exemplo 1A):  $m=2,0$  e  $h=2,0$  metros
- 2º Ponto (Exemplo 1B):  $m=1,5$  e  $h=2,0$  metros

O primeiro ponto visa estabelecer uma comparação direta com a resolução analítica, desenvolvida no item III-2. O segundo ponto tem por finalidade demonstrar a eficiência da adoção de coeficientes de ajuste de passo variáveis, pois conforme demonstramos no item III-3.3, e está indicado na figura III-4, este ponto situa-se sobre uma restrição geométrica, que será violada, caso não controlemos a direção do primeiro passo de minimização.

Os demais dados do problema são os mesmos indicados no item III-2 e que serão repetidos a seguir:

- Barras
  - Material constituinte: aço
  - Área da seção transversal =  $0,0028\text{m}^2$
  - Raio de giração mínimo =  $0,02\text{m}$
  - Módulo de Young =  $21.000.000\text{tf/m}^2$
  - Peso específico =  $7,85\text{tf/m}^3$
- Carregamentos Externos
  - $V = 50\text{tf}$  e  $H = 20\text{tf}$

- Restrições Geométricas

-  $m_{\min} = 1,5$  metros e  $m_{\max} = 2,5$  metros

-  $h_{\min} = 1,0$  metro e  $h_{\max} = 3,0$  metros

- Restrições de comportamento

-  $\sigma_{t,adm} = 14.000tf/m^2$

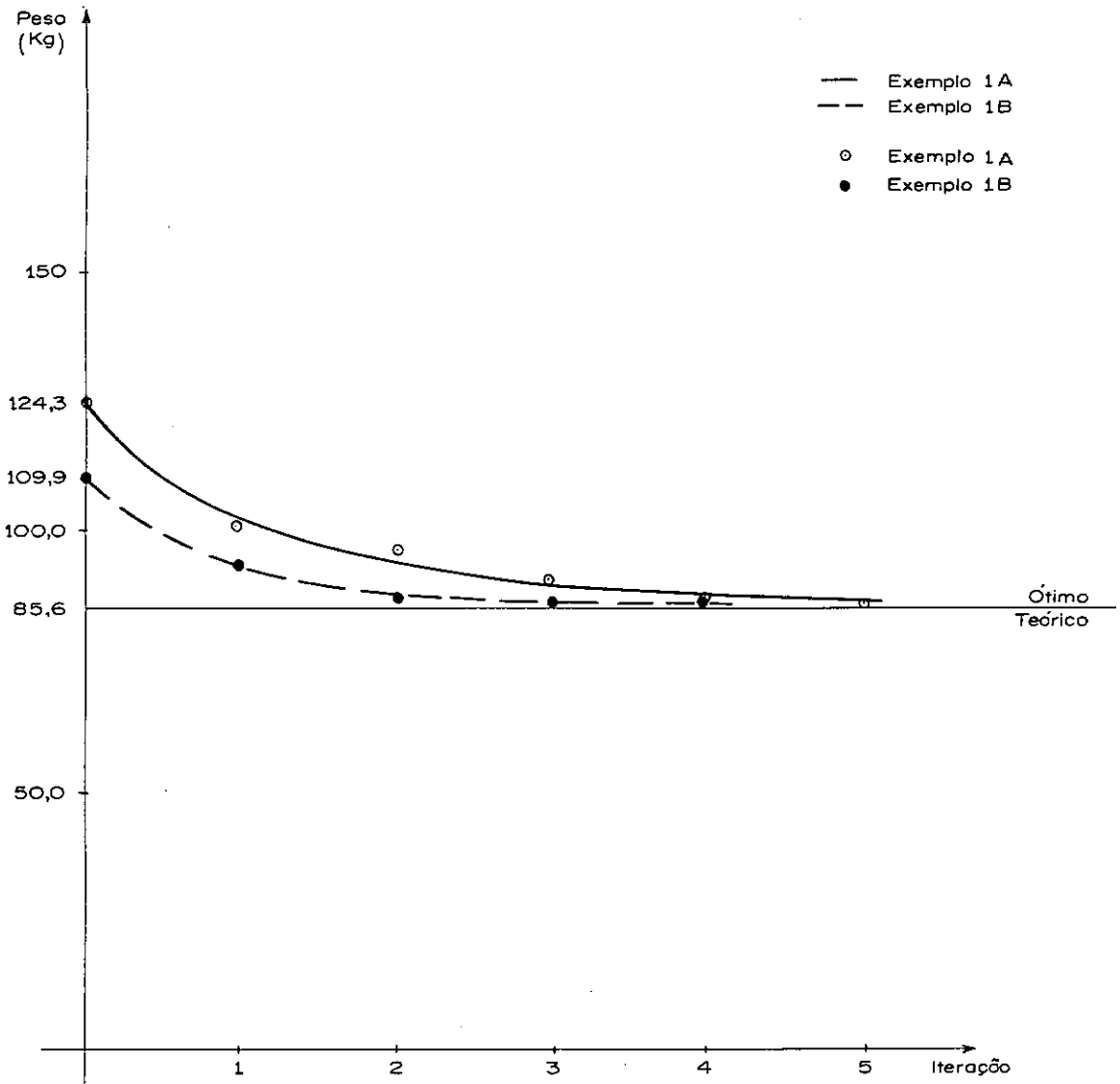
$$\sigma_{c,adm} = \begin{cases} -14.000tf/m^2 & \text{se } L^2 \leq 0,000352R^2E \\ -\left[\left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \times \frac{E}{2}\right]tf/m^2 & \text{se } L^2 > 0,000352R^2E \end{cases}$$

-  $u_{\max} = 0,005$  metros

## 1.2. Resultados Obtidos

I T E M		Exemplos	
		1A	1B
Valor inicial do peso (kgf)		124,3	109,9
Valor final do peso (kgf)		85,8	85,9
Redução percentual do peso		31,0	21,8
Erro percentual em relação ao ótimo teórico		0,2	0,3
Valores finais das incógnitas Ótimo teórico: $m=1,5$ e $h=1,242$ metros	$m$ (metros)	1,5	1,5
	$h$ (metros)	1,248	1,252
Tempo de C.P.U. (seg)		4,8	4,4
Número de Iterações		5	4

A partir dos resultados obtidos, podemos fazer os seguintes comentários:



## CONVERGÊNCIA DO EXEMPLO 1

( Figura V 1 )

- As configurações finais obtidas nos dois casos são praticamente iguais ao ótimo teórico, havendo um erro de 0,2% no exemplo 1A e 0,3% no 1B, o que demonstra ser confiável o processo apresentado.
- A adoção de coeficientes de ajuste do passo variáveis apresentou bons resultados. Primeiramente, conseguimos resolver o problema de modificar a direção do passo, quando a direção original estiver impedida por uma restrição qualquer. Além disso, pudemos verificar que esse processo se realiza sem perda da eficiência do método de otimização como um todo. De fato, o exemplo 1A, no qual praticamente não há interferência de restrições, necessitou de 5 iterações para reduzir o peso de 31%, e o exemplo 1B, de 4 iterações para 21,8% de redução. Logo, verificamos que o número de iterações (e por conseguinte, o tempo de CPU) é função da redução de peso obtida como era nosa intenção, e não da posição do ponto inicial.
- Conforme comentamos no item III-1, o método de Fletcher e Reeves apresenta iterações iniciais de boa qualidade (de maneira semelhante ao "steepest descent") conjugadas a uma convergência eficiente. Esse fato pode ser observado na figura V-1, onde plotamos as curvas peso da estrutura x iteração (histograma).

## 2. EXEMPLO 2

### 2.1. Apresentação do Problema

Vamos otimizar a tesoura para cobertura de um gal -

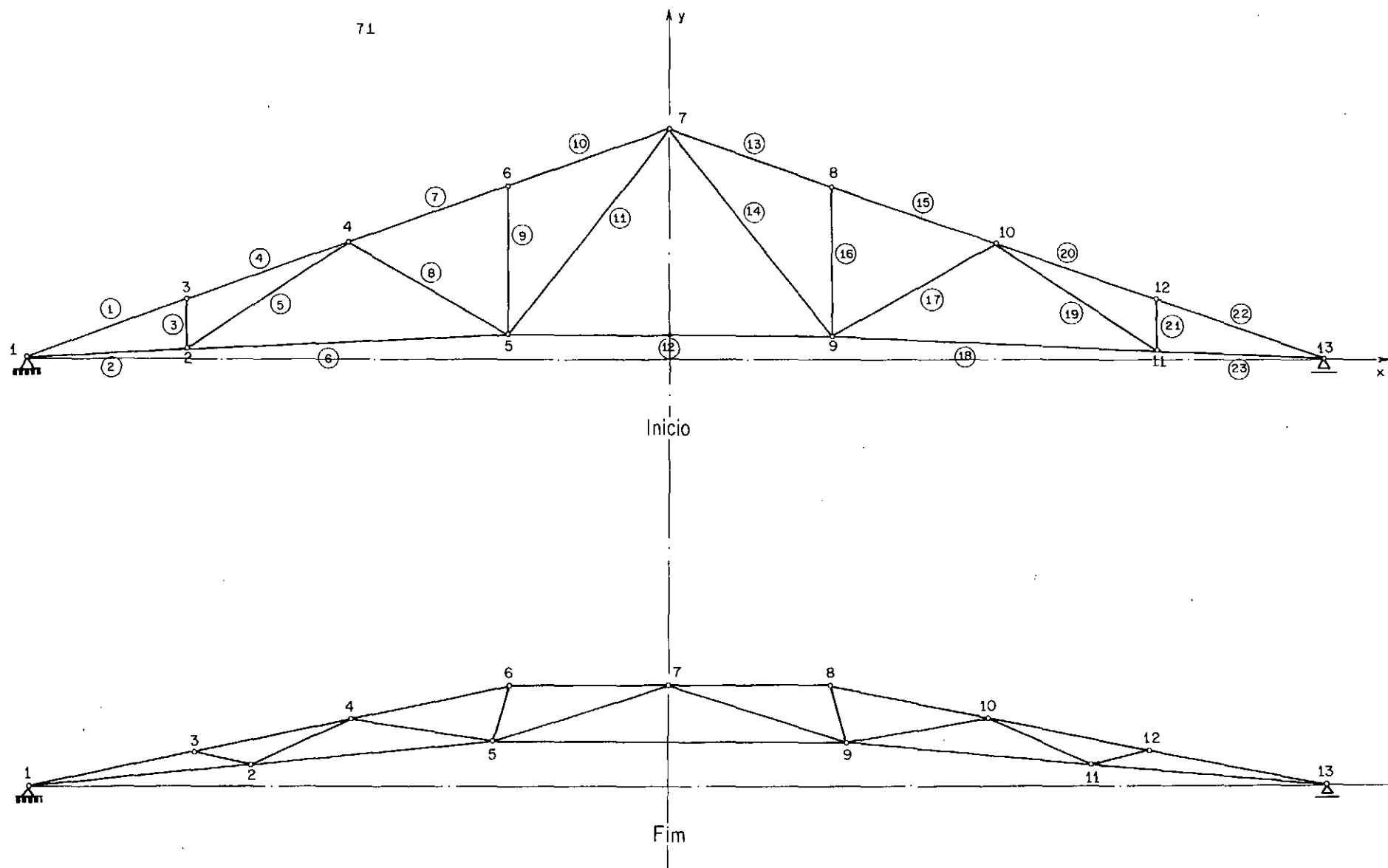
pão industrial, analisada como treliça plana, cuja configuração geométrica inicial está apresentada na figura V-2. O exemplo se rã desenvolvido em duas fases:

- Na primeira, deixaremos o trabalho de otimização se processar sem maiores preocupações com o aspecto final da estrutura, no que tange à sua utilização prática.
- A segunda fase, partirã da estrutura obtida ao final da primeira, incluirã novas restrições geométricas para tornar a estrutura final mais apresentãvel sob o ponto de vista construtivo e possuirã critérios de convergência mais rigorosos que os da fase anterior.

Os dados para o exemplo são:

- Referentes aos nōs (dados em metros)

Nō	Coord. Inicial		Coord. Mínima		Coord. Māxima		Desl. Admis.	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	-8,150	0,000	-8,150	0,000	-8,150	0,000	0,000	0,000
2	-6,113	0,097	-7,113	0,000	-5,113	0,400	0,050	0,050
3	-6,113	0,725	-7,113	0,400	-5,113	1,500	0,050	0,100
4	-4,075	1,450	-5,075	0,750	-3,075	2,000	0,050	0,100
5	-2,038	0,290	-3,038	0,000	-1,038	1,100	0,050	0,065
6	-2,038	2,175	-3,038	1,100	-1,038	3,000	0,050	0,100
7	0,000	2,900	0,000	1,300	0,000	4,000	0,050	0,100
8	2,038	2,175	1,038	1,100	3,038	3,000	0,050	0,100
9	2,038	0,290	1,038	0,000	3,038	1,100	0,050	0,065
10	4,075	1,450	3,075	0,750	5,075	2,000	0,050	0,100
11	6,113	0,097	5,113	0,000	7,113	0,400	0,050	0,050
12	6,113	0,725	5,113	0,400	7,113	1,500	0,050	0,100
13	8,150	0,000	8,150	0,000	8,150	0,000	0,050	0,000



Exemplo 2 - ESTRUTURAS INICIAL E FINAL  
( Figura V-2 )

## - Referentes às barras

Barras	Área(m <sup>2</sup> )	Raio de Gi ração m <sup>í</sup> n i m o (m)
1,4,7,10,13,15 20 e 22	0,00270	0,0323
2,6,12,18 e 23	0,00186	0,0188
3,5,8,9,11,14, 16,17,19 e 21	0,00115	0,0150

Módulo de Young = 21.000.000tf/m<sup>2</sup>

Peso específico = 7,85tf/m<sup>3</sup>

Tensão admissível à tração:  $\sigma_{t,adm} = 14.000\text{tf/m}^2$

Tensão admissível à compressão:

$$\sigma_{c,adm} = \begin{cases} -10.000\text{tf/m}^2 & \text{se } L^2 \leq 0,000493R^2E \\ -\left[\left(\frac{R}{L}\right)^2 \times \frac{E}{2}\right]\text{tf/m}^2 & \text{se } L^2 > 0,000493R^2E \end{cases}$$

## - Referentes aos carregamentos (dados em toneladas)

Nº	Carregamento 1		Carregamento 2		Carregamento 3	
	Carga X	Carga Y	Carga X	Carga Y	Carga X	Carga Y
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	-0,14	0,00	-0,14	0,00	-0,14
3	0,00	-0,51	0,09	-0,76	0,00	-0,51
4	0,00	-0,50	0,09	-0,75	0,00	-0,50
5	0,00	-0,14	0,00	-0,14	0,00	-0,14
6	0,00	-0,52	0,09	-0,76	0,00	-0,52
7	0,00	-0,58	0,04	-0,71	-0,04	-0,71
8	0,00	-0,52	0,00	-0,52	-0,09	-0,76
9	0,00	-0,14	0,00	-0,14	0,00	-0,14
10	0,00	-0,50	0,00	-0,50	-0,09	-0,75
11	0,00	-0,14	0,00	-0,14	0,00	-0,14
12	0,00	-0,51	0,00	-0,51	-0,09	-0,76
13	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,04	0,00

- Referentes aos pares de nōs simétricos

Nōs Simétricos		Plano de Simetria
1	13	Y-Z
2	11	Y-Z
3	12	Y-Z
4	10	Y-Z
5	9	Y-Z
6	8	Y-Z

## 1.2. Resultados Obtidos

A primeira fase foi concluída com os seguintes resultados:

- Coordenadas Nodais (em metros)

Nō	Coordenadas	
	X	Y
1	-8,150	0,000
2	-5,346	0,190
3	-6,058	0,400
4	-4,039	0,750
5	-2,262	0,571
6	-2,044	1,263
7	0,000	1,300
8	2,044	1,263
9	2,262	0,571
10	4,039	0,750
11	5,346	0,190
12	6,058	0,400
13	8,150	0,000



- Redução no peso
  - Valor inicial do peso = 795,4kgf
  - Valor final do peso = 720,0kgf
  - Redução percentual = 9,5%
- Número de iterações = 2
- Tempo de CPU = 13,2 seg

A partir dos resultados obtidos na primeira fase, passamos à segunda, na qual obrigamos os nós 1, 3, 4 e 6 a estarem alinhados em uma reta, de forma a permitir a construção do telhado do galpão.

Os resultados obtidos foram:

- Coordenadas Nodais (em metros)

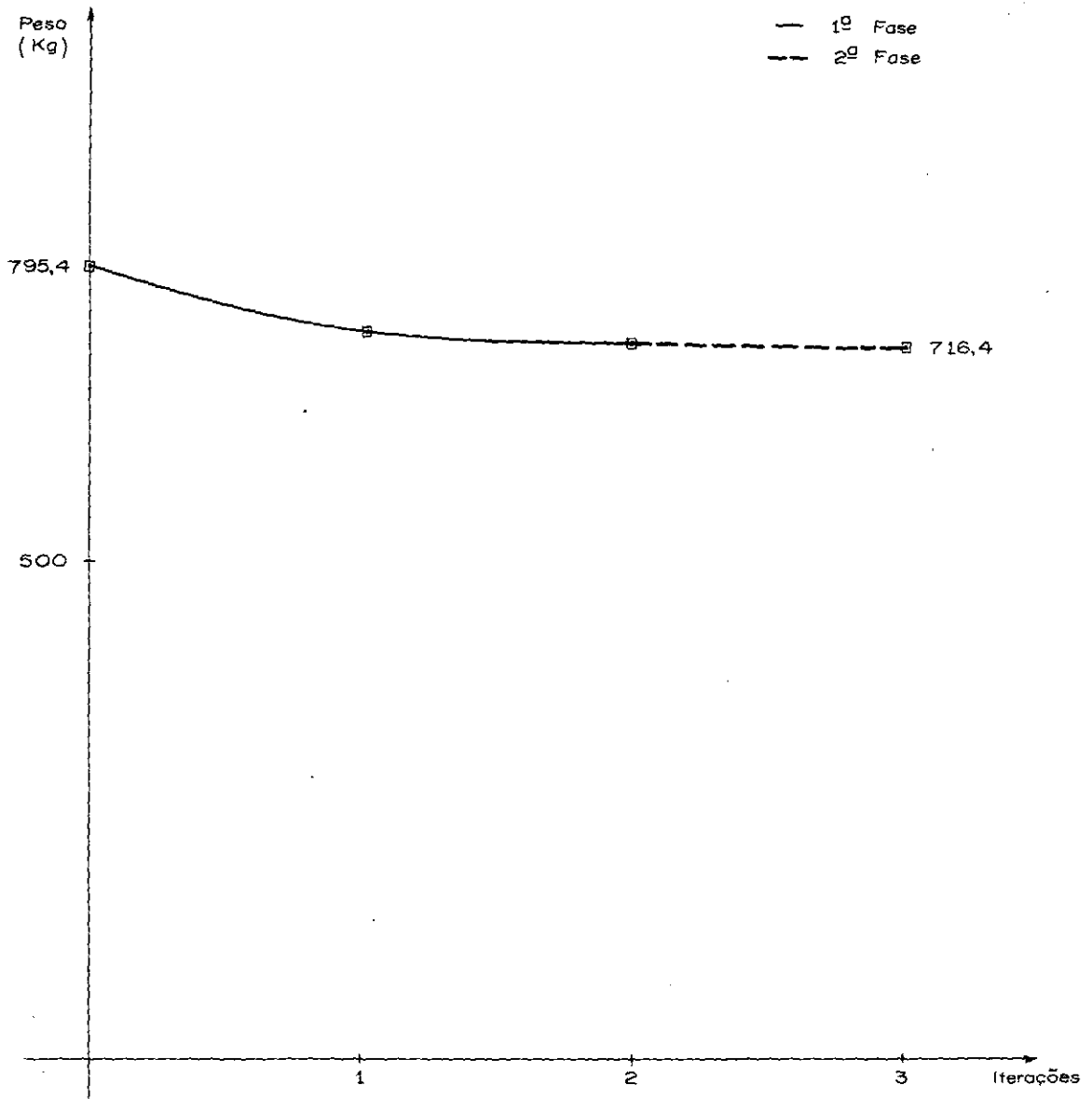
Nº	Coordenadas	
	X	Y
1	-8,150	0,000
2	-5,252	0,279
3	-6,000	0,455
4	-4,000	0,877
5	-2,222	0,569
6	-2,006	1,299
7	0,000	1,300
8	2,006	1,299
9	2,222	0,569
10	4,000	0,877
11	5,252	0,279
12	6,000	0,455
13	8,150	0,000

- Redução no peso
  - Valor inicial do peso = 720,0kgf

- Valor final do peso = 716,4kgf
- Redução percentual = 0,5%
- Redução percentual em relação à 1.<sup>a</sup> Fase = 10,0%
- Número de Iterações = 1
- Tempo de CPU = 16,1 seg

A partir dos resultados obtidos, podemos estabelecer os seguintes comentários:

- O processo demonstrou ser bastante eficiente, pois o exemplo analisado apresenta um total de 26 variáveis de projeto (13 nós x 2 coordenadas por nó) e 72 restrições de comportamento (23 barras x 2 restrições + 13 nós x 2 restrições), além das restrições geométricas. Esse problema já pode ser considerado de porte médio, tendo em vista suas características, e necessitou apenas de 29,3 segundos de CPU (nas duas fases) para em 3 iterações conseguir 10% de redução no peso.
- Ao término do processo estavam ativas as restrições de comportamento referentes aos deslocamentos verticais (na direção do eixo Y) dos nós 2 (para o segundo carregamento) e 11 (para o terceiro). Esse fato já era de se esperar, tendo em vista que para tesouras de cobertura a flecha normalmente, é dimensionante.
- Na figura V-2 está indicada a estrutura final, para permitir uma comparação com a inicial. Nessa comparação é importante observar que os montantes e diagonais foram responsáveis por quase todo o ganho de pe



### CONVERGÊNCIA DO EXEMPLO 2

( Figura V 3 )

so obtido, já que os cordões superior e inferior pouco variaram de comprimento, pois os apoios permaneceram fixos durante o processo.

- Para permitir uma melhor visualização da convergência obtida, na figura V-3 está indicada a curva redução do peso x iteração (histograma).

### 3. EXEMPLO 3

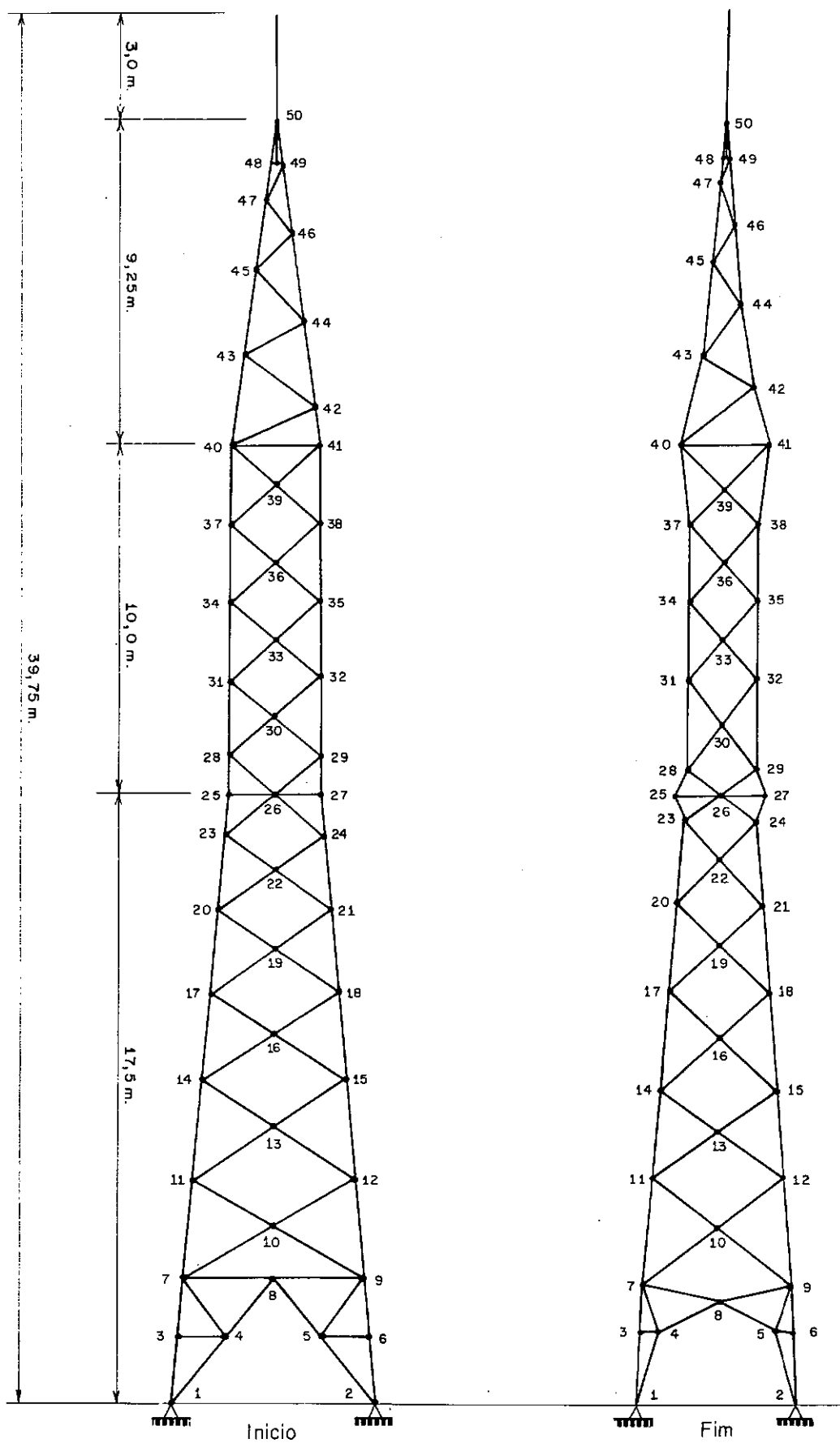
#### 3.1. Apresentação do Problema

Vamos otimizar uma das faces de um pilar de torre de transmissão para linhas de 500KV, exemplo baseado em um projeto real, que já foi executado. Essa face será analisada como treliça plana e seguirá estritamente todos os dados utilizados no projeto original, de forma a permitir uma comparação de resultados.

Os dados para o exemplo são:

- Coordenadas Nodais (em metros)

Nó	Coordenadas		No simétrico em relação ao plano Y-Z	Nó	Coordenadas		No simétrico em relação ao plano Y-Z
	X	Y			X	Y	
1	-2,950	0,000	2	28	-1,300	18,620	29
3	-2,767	1,941	6	30	0,000	19,730	-
4	-1,570	1,941	5	31	-1,300	20,840	32
7	-2,606	3,648	9	33	0,000	21,950	-
8	0,000	3,648	-	34	-1,300	23,060	35
10	0,000	5,104	-	36	0,000	24,170	-
11	-2,330	6,560	12	37	-1,300	25,280	38
13	0,000	7,967	-	39	0,000	26,390	-
14	-2,067	9,373	15	40	-1,300	27,500	41
16	0,000	10,679	-	42	1,133	28,688	-
17	-1,820	11,985	18	43	-0,938	30,075	-
19	0,000	13,190	-	44	0,771	31,263	-
20	-1,593	14,395	21	45	-0,590	32,550	-
22	0,000	15,500	-	46	0,451	33,540	-
23	-1,384	16,604	24	47	-0,312	34,531	-
25	-1,300	17,500	27	48	-0,166	35,571	49
26	0,000	17,500	-	50	0,000	36,750	-



Exemplo 3 - ESTRUTURAS INICIAL E FINAL  
(Figura V-4)

## - Barras

Barra	Incidência		Área (m <sup>2</sup> )	Raio de Giração Mínimo (m)	Barra simé- trica em relação ao plano Y-Z
	Nº Inicial	Nº Final			
1	1	3	0,00459	0,040	4
2	1	4	0,00186	0,030	3
5	3	4	0,00061	0,010	6
7	3	7	0,00459	0,040	12
8	4	7	0,00093	0,015	11
9	4	8	0,00186	0,030	10
13	7	8	0,00125	0,020	14
15	7	11	0,00459	0,040	18
16	7	10	0,00125	0,020	17
19	10	11	0,00125	0,020	20
21	11	14	0,00459	0,040	24
22	11	13	0,00125	0,020	23
25	13	14	0,00125	0,020	26
27	14	17	0,00459	0,040	30
28	14	16	0,00093	0,015	29
31	16	17	0,00093	0,015	32
33	17	20	0,00459	0,040	36
34	17	19	0,00093	0,015	35
37	19	20	0,00093	0,015	38
39	20	23	0,00459	0,040	42
40	20	22	0,00093	0,015	41
43	22	23	0,00093	0,015	44
45	23	25	0,00459	0,040	48
46	23	26	0,00186	0,030	47
49	25	26	0,00918	0,080	50
51	25	28	0,00459	0,040	54
52	26	28	0,00186	0,030	53
55	28	31	0,00459	0,040	58
56	28	30	0,00093	0,015	57
59	30	31	0,00093	0,015	60
61	31	34	0,00459	0,040	64
62	31	33	0,00093	0,015	63
65	33	34	0,00093	0,015	66
67	34	37	0,00459	0,040	70

Barra	Incidência		Área (m <sup>2</sup> )	Raio de Giração Mínimo (m)	Barra simétrica em relação ao plano Y-Z
	Nº Inicial	Nº Final			
68	34	36	0,00093	0,015	69
71	36	37	0,00093	0,015	72
73	37	40	0,00459	0,040	76
74	37	39	0,00093	0,015	75
77	39	40	0,00093	0,015	78
79	40	41	0,00918	0,080	-
80	40	43	0,00093	0,015	-
81	40	42	0,00058	0,012	-
82	41	42	0,00093	0,015	-
83	42	43	0,00093	0,015	-
84	43	45	0,00093	0,015	-
85	43	44	0,00058	0,012	-
86	42	44	0,00093	0,015	-
87	44	45	0,00058	0,015	-
88	45	47	0,00093	0,015	-
89	45	46	0,00058	0,012	-
90	44	46	0,00093	0,015	-
91	47	46	0,00058	0,012	-
92	47	48	0,00093	0,015	-
93	47	49	0,00058	0,012	-
94	46	49	0,00093	0,015	-
95	48	49	0,00058	0,012	-
96	48	50	0,00093	0,015	97

Módulo de Young = 21.000.000tf/m<sup>2</sup>

Peso Específico = 7,85tf/m<sup>3</sup>

- Nós mantidos fixos

O projeto elétrico tem como condicionante que os nós 25, 27, 40, 41 e 50 sejam mantidos fixos.

- Nós com variação restringida

Os nós 1 e 2, apoios da treliça, deverão variar so -

bre o eixo X, de tal forma que a distância entre eles nunca seja inferior a 4,6 metros. Essa condição visa evitar que o aumento das cargas nas fundações seja de tal ordem, que anule qualquer economia no peso da estrutura.

- Tensões admissíveis

$$\sigma_{t,adm} = 14.000 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_{c,adm} = \begin{cases} -11.000 \text{ tf/m}^2 & \text{para } \lambda \leq \lambda_{lim} \\ -\frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} & \text{para } \lambda > \lambda_{lim} \end{cases}$$

- Deslocamentos admissíveis

O deslocamento máximo do n° 5, na direção X, deverá ser limitado à altura da torre dividida por 290, ou seja, 0,185 metros.

- Carregamentos externos considerados

Os carregamentos externos, em número de três, são os apresentados na tabela seguinte, onde todas as cargas estão em tf:

N°	Carregamento 1		Carregamento 2		Carregamento 3	
	Carga X	Carga Y	Carga X	Carga Y	Carga X	Carga Y
8	0,00	-0,88	0,00	-0,88	0,00	-1,00
10	0,00	-0,88	0,00	-0,88	0,00	-1,00
13	0,00	-0,88	0,00	-0,88	0,00	-1,00
14	0,45	0,00	-	-	0,45	0,00
16	0,00	-0,88	0,00	-0,88	0,00	-1,00
19	0,00	-0,88	0,00	-0,88	0,00	-1,00



Nº	Carregamento 1		Carregamento 2		Carregamento 3	
	Carga X	Carga Y	Carga X	Carga Y	Carga X	Carga Y
22	0,00	-0,88	0,00	-0,88	0,00	-1,00
25	0,42	0,00	-	-	0,42	0,00
26	0,00	-1,45	0,00	-1,45	0,00	-2,05
27	2,63	0,00	2,19	0,00	4,65	0,00
30	0,00	-0,58	0,00	-0,58	0,00	-0,58
33	0,00	-0,58	0,00	-0,58	0,00	-0,58
36	0,00	-0,58	0,00	-0,58	0,00	-0,58
39	0,00	-0,58	0,00	-0,58	0,00	-0,58
40	0,34	0,00	-	-	0,34	0,00
41	4,85	0,00	4,40	0,00	2,55	0,00
50	0,59	-0,19	0,48	-0,19	0,57	-0,19

### 3.2. Resultados Obtidos

Os resultados obtidos ao final do processo foram os seguintes:

#### - Coordenadas Nodais (em metros)

Nº	Coordenadas		Nº	Coordenadas	
	X	Y		X	Y
1	-2,34	0,00	28	-1,00	18,25
3	-2,24	2,11	30	0,00	19,60
4	-1,69	2,12	31	-1,00	20,84
7	-2,16	3,45	33	0,00	21,95
8	0,00	3,00	34	-1,00	23,06
10	0,00	5,18	36	0,00	24,10
11	-1,89	6,55	37	-1,00	25,18
13	0,00	7,98	39	0,00	26,15
14	-1,60	8,97	40	-1,30	27,50
16	0,00	10,62	42	0,82	29,15
17	-1,40	11,90	43	-0,63	29,98
19	0,00	13,29	44	0,45	31,45
20	-1,21	14,35	45	-0,38	32,60
22	0,00	15,60	46	0,29	33,77
23	-1,02	16,80	47	-0,19	34,90
25	-1,30	17,50	48	-0,10	35,57
26	0,00	17,50	50	0,00	36,75

#### - Redução de Peso

- Valor inicial do peso = 3,495tf

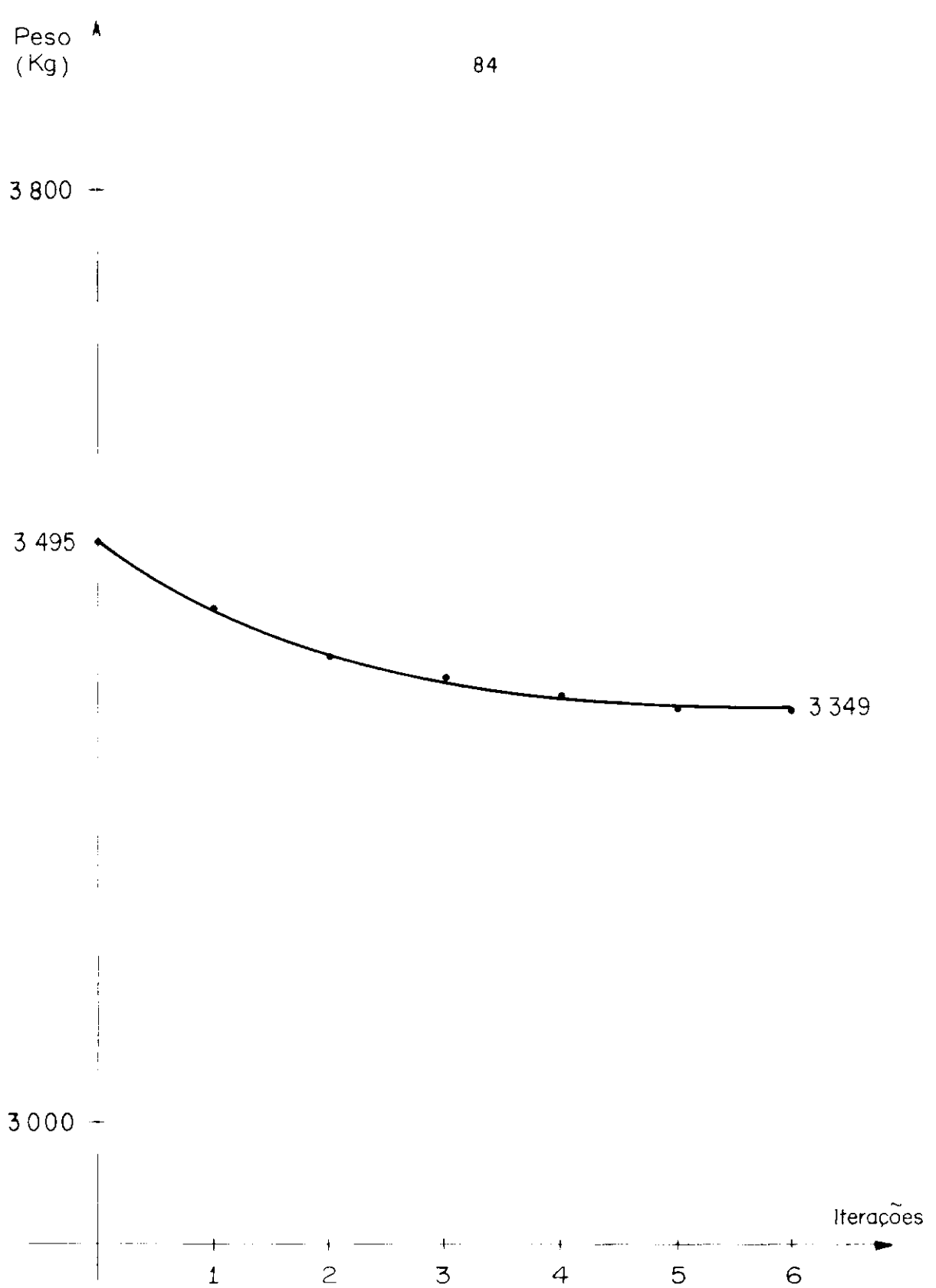
- Valor final do peso = 3,349tf
- Redução Percentual do peso = 4,3%
- Tempo de CPU = 3,5min
- Número de Iterações = 6

Os resultados obtidos nos permitem estabelecer os seguintes comentários:

- A redução total de peso obtida em cada torre de transmissão foi de:
  - Em cada face: 0,146tf
  - Considerando dois pilares por torre de transmissão, cada um com duas faces iguais à otimizada:  $2 \times 2 \times 0,146 = 0,584\text{tf}$ .

Para um total de 500 torres na linha de transmissão, teremos, aproximadamente, 300tf de ganho em peso. Avaliando o custo da tonelada de aço estrutural em Cr\$ 15.000,00, obteríamos uma economia da ordem de Cr\$ 4.500.000,00 na linha de transmissão. Esses números dão uma idéia da importância prática que os processos de otimização podem assumir.

- O processo de otimização demonstrou eficiência, pois tínhamos um total de 88 variáveis de projeto (44 nós x 2 coordenadas por nó), o que já constitui um problema de porte médio, e obtivemos os resultados em 6 iterações, com um total de 3,5min de tempo de CPU.
- Ao final do processo estavam ativas as seguintes restrições:
  - Distância entre os nós 1 e 2.



CONVERGÊNCIA DO EXEMPLO 3

( Figura V – 5 )

- Tensões nas barras 18, 24 e 47 para o carregamento 1, que é o mais desfavorável.
- Deslocamento na direção X do nó 50, também para o carregamento 1.
- Na figura V-4 estão mostradas as configurações geométricas inicial e final da estrutura, permitindo uma melhor visualização da redução obtida. A convergência do processo (histograma de peso) está indicada na figura V-5.

#### 4. EXEMPLO 4

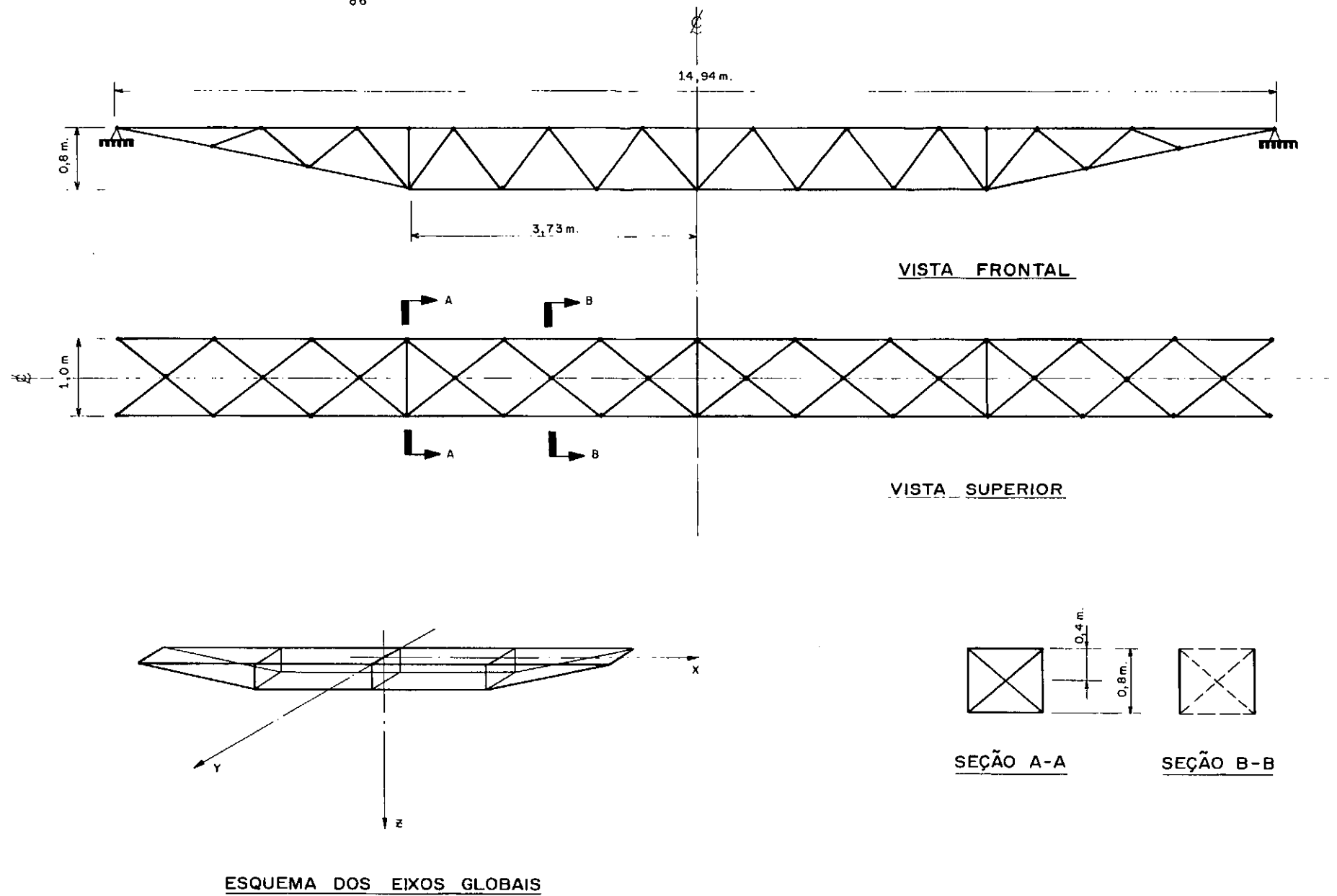
##### 4.1. Apresentação do Problema

Finalmente, vamos otimizar uma viga metálica pertencente a uma subestação industrial para 230KV, exemplo baseado em um projeto real, que já foi executado. A viga, que está mostrada na figura V-6, será analisada como treliça espacial e seguirá estritamente todos os dados utilizados no projeto original, de forma a permitir uma comparação de resultados.

Os dados para o exemplo são:

- Coordenadas Nodais (em metros)

Nó	Coordenadas			No simétrico em relação ao plano X-Z	No simétrico em relação ao plano Y-Z
	X	Y	Z		
1	-7,470	-0,500	0,000	2	82
3	-6,837	0,000	0,000	-	81
4	-6,240	-0,500	0,000	5	79
6	-6,217	-0,500	0,281	7	74
8	-5,595	-0,500	0,000	9	72



Exemplo 4 - CONFIGURAÇÃO INICIAL

Nº	Coordenadas			Nº simétrico em relação ao plano X-Z	Nº simétrico em relação ao plano Y-Z
	X	Y	Z		
10	-5,638	0,000	0,000	-	78
11	-5,036	-0,500	0,000	12	76
13	-4,994	-0,500	0,556	14	65
15	-4,365	-0,500	0,000	16	69
17	-4,434	0,000	0,000	-	71
18	-3,730	-0,500	0,800	19	59
20	-3,730	0,000	0,400	-	64
21	-3,730	-0,500	0,000	22	67
23	-2,530	-0,500	0,800	24	52
25	-3,140	-0,500	0,000	26	61
27	-3,042	0,000	0,000	-	63
28	-2,458	-0,500	0,000	29	57
30	-1,310	-0,500	0,800	31	45
32	-1,920	-0,500	0,000	33	54
34	-1,874	0,000	0,000	-	56
35	-1,290	-0,500	0,000	36	50
37	0,000	-0,500	0,800	38	-
39	-0,700	-0,500	0,000	40	47
41	-0,706	0,000	0,000	-	49
42	0,000	0,000	0,400	-	-
43	0,000	-0,500	0,000	44	-

Para complementar os dados dos nºs falta considerar as seguintes simetrias:

Nº	Nº simétrico em relação ao plano Y-Z	Nº	Nº simétrico em relação ao plano Y-Z	Nº	Nº simétrico em relação ao plano Y-Z	Nº	Nº simétrico em relação ao plano Y-Z
2	83	12	77	22	68	31	46
5	80	14	66	24	53	33	55
7	75	16	70	26	62	36	51
9	73	19	60	29	58	40	48

## - Barras

Barra	Incidência		Área (m <sup>2</sup> )	Raio de Giração Mínimo (m)	Barra simétrica em relação ao plano X-Z	Barra simétrica em relação ao plano Y-Z
	Nº Inicial	Nº Final				
1	37	38	0,00370	0,040	-	-
2	1	4	0,00185	0,030	5	173
3	1	3	0,00077	0,013	4	177
6	1	6	0,00115	0,016	7	179
8	3	4	0,00077	0,013	9	174
10	4	8	0,00185	0,030	13	169
11	4	10	0,00077	0,013	12	170
14	6	8	0,00050	0,009	15	167
16	6	13	0,00115	0,016	17	165
18	8	13	0,00050	0,009	19	163
20	8	11	0,00185	0,030	23	159
21	10	11	0,00077	0,013	22	160
24	11	15	0,00185	0,030	27	155
25	11	17	0,00077	0,013	26	156
28	13	15	0,00050	0,009	29	153
30	13	18	0,00115	0,016	31	151
32	15	21	0,00185	0,030	35	145
33	17	21	0,00077	0,013	34	146
36	15	18	0,00050	0,009	37	149
38	21	22	0,00370	0,040	-	137
39	18	21	0,00077	0,013	40	139
41	18	19	0,00370	0,040	-	138
42	20	21	0,00050	0,009	44	141
43	18	20	0,00050	0,009	45	142
46	21	25	0,00185	0,030	49	133
47	21	27	0,00077	0,013	48	134
50	18	25	0,00050	0,009	51	131
52	18	23	0,00115	0,016	53	129
54	23	25	0,00050	0,009	55	127
56	25	28	0,00185	0,030	59	123
57	27	28	0,00077	0,013	58	124
60	28	32	0,00185	0,030	63	119

Barra	Incidência		Área (m <sup>2</sup> )	Raio de Giração Mínimo (m)	Barra simétrica em relação ao plano X-Z	Barra simétrica em relação ao plano Y-Z
	Nº Inicial	Nº Final				
61	28	34	0,00077	0,013	62	120
64	23	32	0,00050	0,009	65	117
66	23	30	0,00115	0,016	67	115
68	30	32	0,00050	0,009	69	113
70	32	35	0,00185	0,030	73	109
71	34	35	0,00077	0,013	72	110
74	35	39	0,00185	0,030	77	105
75	35	41	0,00077	0,013	76	106
78	30	39	0,00050	0,009	79	103
80	30	37	0,00115	0,016	81	101
82	37	39	0,00050	0,009	83	99
84	39	43	0,00185	0,030	87	95
85	41	43	0,00077	0,013	86	96
89	37	43	0,00077	0,013	90	-
91	42	43	0,00050	0,009	93	-
92	37	42	0,00050	0,009	94	-

Para complementar os dados das barras falta considerar as seguintes simetrias:

Nº	Barra simétrica em relação ao plano Y-Z	Nº	Barra simétrica em relação ao plano Y-Z	Nº	Barra simétrica em relação ao plano Y-Z
4	178	27	158	63	122
5	176	31	152	67	116
7	180	34	147	72	111
9	175	35	148	73	112
12	171	48	135	76	107
13	172	49	136	77	108
17	166	53	130	81	102
22	161	58	125	86	97
23	162	59	126	87	98
26	157	62	121	-	-



$$\text{Módulo de Young} = 21.000.000 \text{tf/m}^2$$

$$\text{Peso Específico} = 7,85 \text{tf/m}^3$$

- Nós mantidos fixos

Os nós 1, 2, 82 e 83, apoios da estrutura serão mantidos fixos.

- Distâncias ao plano X-Z fixas

Todos os nós deverão ter distâncias ao plano X-Z constantes ao longo do processo.

- Nós mantidos no plano X-Y

Os nós pertencentes ao plano X-Y não poderão abandoná-lo, durante o desenvolvimento do processo.

- Tensões admissíveis

$$\sigma_{t,adm} = 14.000 \text{tf/m}^2$$

$$\sigma_{c,adm} = \begin{cases} -10.000 \text{tf/m}^2 & \text{para } \lambda \leq \lambda_{lim} \\ -\frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} & \text{para } \lambda > \lambda_{lim} \end{cases}$$

- Deslocamentos admissíveis

No meio do vão, os deslocamentos admissíveis serão:

- Direção Y = 0,037 metros ( $\frac{1}{400}$  do vão)

- Direção Z = 0,06 metros ( $\frac{1}{250}$  do vão)

- Carregamentos externos considerados

Os carregamentos externos, em número de dois, são apresentados na tabela seguinte, onde todas as cargas es-

tão em tf:

Nº	Carregamento 1			Carregamento 2		
	Carga X	Carga Y	Carga Z	Carga X	Carga Y	Carga Z
18	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00	0,40
19	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00	0,40
21	0,00	0,00	0,05	0,00	0,30	0,05
22	0,00	0,90	0,05	0,00	0,90	0,05
37	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00	0,40
38	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00	0,40
43	0,00	0,00	0,05	0,00	0,30	0,05
44	0,00	0,90	0,05	0,00	0,90	0,05
59	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00	0,40
60	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00	0,40
67	0,00	0,00	0,05	0,00	0,30	0,05
68	0,00	0,90	0,05	0,00	0,90	0,05

Nota: O carregamento 1 é composto pelas cargas permanente e acidental, e o 2, pelas cargas permanente e de vento.

#### 4.2. Resultados Obtidos

Os resultados obtidos ao final do processo foram os seguintes:

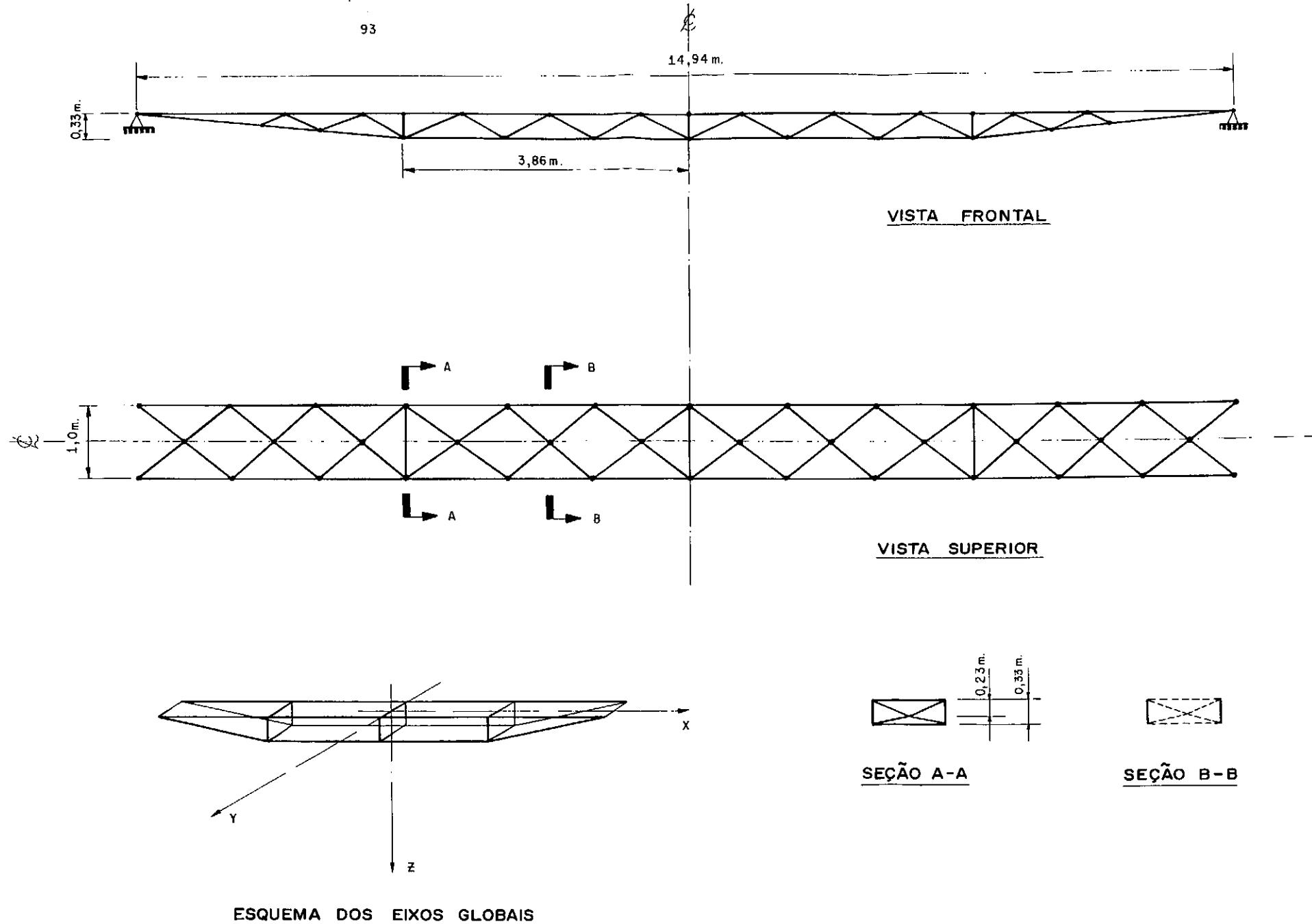
- Coordenadas Nodais (em metros)

Nº	Coordenadas			Nº	Coordenadas		
	X	Y	Z		X	Y	Z
1	-7,47	-0,50	0,00	23	-2,53	-0,50	0,33
3	-6,84	0,00	0,00	25	-3,13	-0,50	0,00
4	-6,24	-0,50	0,00	27	-3,19	0,00	0,00
6	-5,81	-0,50	0,15	28	-2,46	-0,50	0,00
8	-5,46	-0,50	0,00	30	-1,31	-0,50	0,33
10	-5,64	0,00	0,00	32	-1,92	-0,50	0,00
11	-5,04	-0,50	0,00	34	-1,88	0,00	0,00
13	-5,00	-0,50	0,23	35	-1,29	-0,50	0,00
15	-4,44	-0,50	0,00	37	0,00	-0,50	0,33
17	-4,32	0,00	0,00	39	-0,68	-0,50	0,00
18	-3,86	-0,50	0,33	41	-0,66	0,00	0,00
20	-3,86	0,00	0,23	42	0,00	0,00	0,23
21	-3,86	-0,50	0,00	43	0,00	-0,50	0,00

- Redução de Peso
  - Valor inicial do peso = 1,410tf
  - Valor final do peso = 1,331tf
  - Redução percentual do peso = 6%
- Tempo de CPU = 22,5 min
- Número de Iterações: 10

Os resultados obtidos nos permitem estabelecer os seguintes comentários:

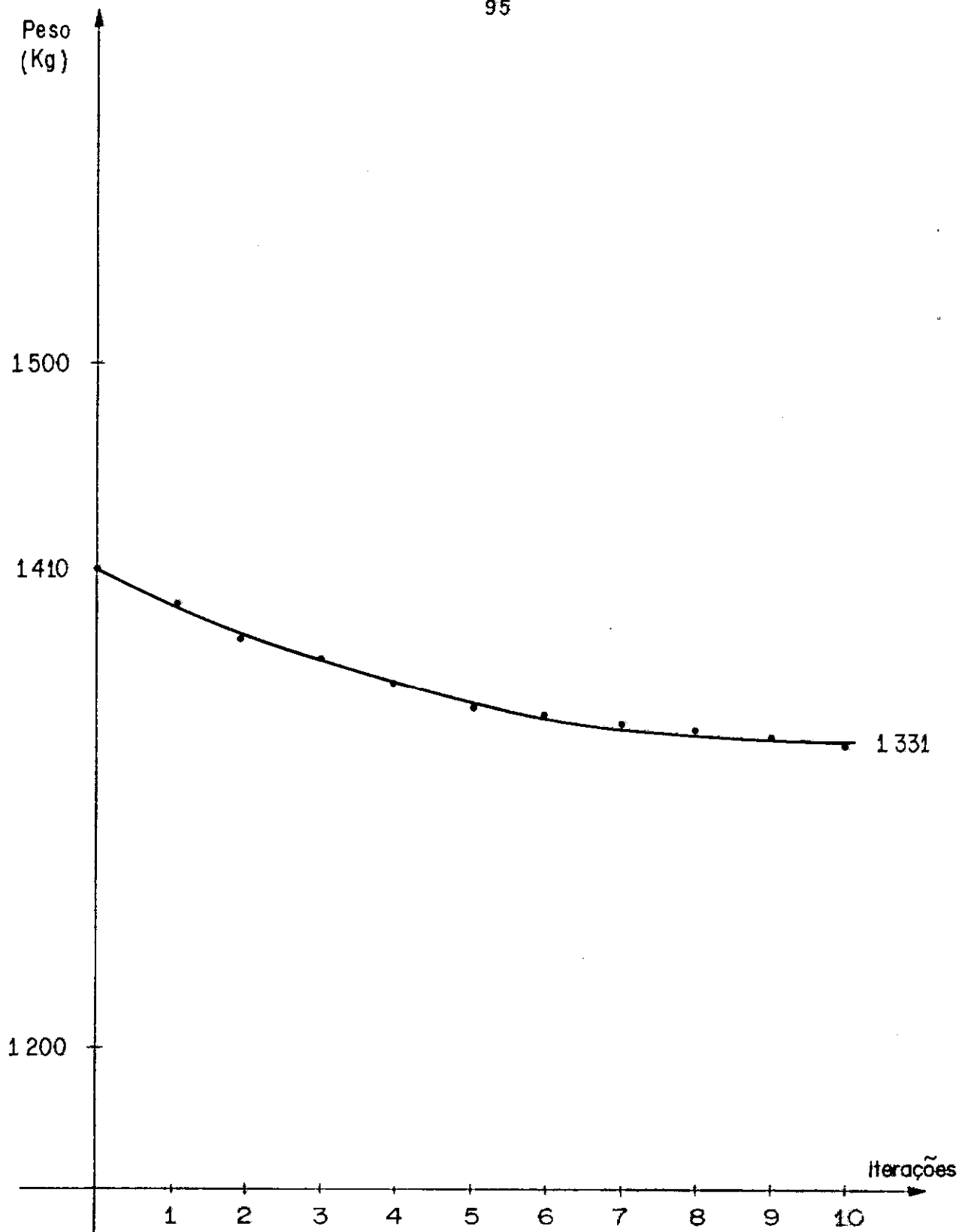
- Na figura V-7 está mostrada a configuração final da estrutura, permitindo uma melhor visualização do ganho obtido. É importante observar que a redução de peso foi conseguida através da diminuição da altura das faces verticais, já que as restrições geométricas impediram a realização de modificações na largura da viga.
- Ao término do processo estavam ativas as restrições de comportamento referentes aos deslocamentos horizontais (na direção do eixo Y) dos nós situados no meio do vão, para carregamento 1. As tensões nas barras e os demais deslocamentos situaram-se bem abaixo dos limites admitidos.
- O problema analisado, com 237 variáveis de projeto (79 nós x 3 coordenadas por nó), já é um problema de grande porte. Podemos considerar como boa, a eficiência do método nesse caso, pois foram necessárias 10 iterações, com dispêndio de 22,5 min de CPU, para atingir os resultados finais.



Exemplo 4 – CONFIGURAÇÃO FINAL

( Figura V – 7 )

- A convergência obtida para o processo (histograma de peso) está indicada na figura V-8.



CONVERGÊNCIA DO EXEMPLO 4  
( Figura V – 8 )

C A P Í T U L O . V I

CONCLUSÕES

Apresentamos ao longo deste trabalho, um método para otimização estrutural de treliças espaciais, submetidas a carregamentos externos múltiplos, considerando como variáveis as configurações geométricas ("Lay-outs") das mesmas. Esse método deu origem a um programa para computadores digitais, denominado AUTOFORM, cujas características principais foram discutidas ao longo do texto.

Pudemos verificar que, tanto o método apresentado, como o programa dele derivado, são aplicáveis na prática corrente da engenharia estrutural. De fato, a resolução de alguns problemas reais, ou seja de estruturas já projetadas e construídas, a través do programa AUTOFORM, nos permitiu visualizar a economia efetiva que teria sido obtida, se os engenheiros projetistas dispusessem de uma ferramenta de cálculo similar à apresentada. Este fato já nos permite garantir a validade, não só deste trabalho, como de todos os outros que vem sendo ou ainda serão, desenvolvidos no campo da otimização estrutural.

A partir dos exemplos analisados, pudemos ainda concluir que a utilização na prática de programas de otimização estrutural, requer a adoção de alguns princípios básicos, resumidos a seguir.

Os projetos devem ser executados em duas fases. A primeira consiste no lançamento da estrutura, e na sua otimização através de um programa. A finalidade dessa fase consiste na determinação, de maneira precisa, do funcionamento da estrutura e dos parâmetros que realmente tem influência no seu dimensionamento. Nessa fase é importante, que ao utilizar o programa de otimização façamos o menor uso possível de restrições, só con -



servando mesmo, aquelas que sejam necessárias para não descaracterizar o problema. Assim, permitimos que o processo de otimização aja o mais livremente possível sobre a estrutura, deixando claro as suas características e parâmetros principais. A seguir, procedemos à segunda fase, que deve ser iniciada por uma análise da estrutura obtida ao final da primeira. Fazemos então, as modificações julgadas necessárias, para melhorar as suas características, como por exemplo: acrescentar ou retirar barras, modificar restrições, etc. Logo após, utilizamos novamente o programa de otimização que deverá incluir então, todas as restrições necessárias ao problema, obtendo a estrutura final. Cumpre ressaltar que, em alguns casos especiais, de estruturas particularmente complexas, poderemos ter necessidade de executar outras fases, semelhantes à segunda, até obter o projeto ideal. Outro aspecto importante, é o fato de que a intervenção do engenheiro no projeto, continua extremamente importante, mesmo com a utilização de programas para otimização.

Um exemplo que demonstra tudo o que foi exposto é o do item V-2, em que o projeto final é alcançado após duas fases distintas.

Finalmente, queremos deixar clara a nossa convicção que este trabalho, longe de significar algo de definitivo no âmbito da otimização estrutural, apresenta apenas mais uma linha de pesquisas (ou seja, aquela que considera variável a configuração geométrica de uma estrutura) na qual há, ainda, muitos tópicos a serem explorados. Dentre outros, podemos citar os seguintes: utilização de diferentes métodos de otimização visando efetuar estudos comparativos da eficiência de cada um; desenvolvimento de programas semelhantes para outros tipos de estrutura.

C A P Í T U L O VII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALSPAUGH, D.W. e KUNOO, K. - "Optimum configurational and dimensional design of truss structures" - Rev. Computer & Structures, vol. IV, nº 4, Pergamon Press, 1974.
- [2] COX, H. - "The Design of Structures of Least Weight" - Pergamon Press, 1965, apud "Optimum structural design", Gallagher, R.H. e Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons, 1973.
- [3] DOBBS, M.W. e FELTON, L.P. - "Optimization of Truss Geometry" Journal of the Structural Division (ASCE), outubro 1969.
- [4] DORN, W.S.; GOMORY, R.E. e GREENBERG, H.J. - "Automatic design of optimal structures", Journal de Mecanique, vol. III, nº 1, 1964, apud "Automated design of trusses for optimum geometry", Vanderplaats, G.N. e Moses, F., Journal of the Structural Division (ASCE), março 1972.
- [5] FERRANTE, A.J. e BREBBIA, C.A. - "The finite element technique", editora da URGs, 1975.
- [6] FOX, R.L. - "Optimization methods for engineering design", Addison - Wesley, 1971.
- [7] FU, K.C. - "An application of search technique in truss configurational optimization" - Rev. Computer & Structures, vol. III, nº 3, Pergamon Press, 1973.
- [8] GERE, J.M. e WEAVER, Jr. W. - "Analysis of framed structures" Van Nostrand Reinhold, 1965.
- [9] GALLAGHER, R.H. e ZIENKIEWICZ, O.C. - "Optimum structural design - theory and applications" - John Wiley & Sons, 1973.

- [10] HALBRITTER, A.L. - "Optimizaci3n estructural con variaci3n de geometria", Anais do III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1975.
- [11] HEMP, W. - "Theory of structural design", Report 214, AGARD, outubro 1958, apud "Optimum structural design", Gallagher, R.H. e Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons, 1973.
- [12] MAXWELL, J.C. - "Scientific papers", vol. II, 1869, apud "Optimum structural design", Gallagher, R.H. e Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons, 1973.
- [13] MICHELL, A.G.M. - "The limits of economy of material in framed structures", Phil.Mag. (series 6) 1904, apud "Optimum structural design", Gallagher, R.H. e Zienkiewicz, O.C. , John Wiley & Sons, 1973.
- [14] PEDERSEN, P. - "On the optimal Lay-out of multi-purpose trusses", Rev. Computer & Structures, vol. II, nºs 5/6 , 1972.
- [15] PEDERSEN, P. - "Optimal joint positions for space trusses", Journal of the Structural Division (ASCE), dezembro 1973.
- [16] PRZEMINIECKI, J.S. - "Theory of matrix structural analysis", McGraw-Hill, 1968.
- [17] REINSCHMIDT, K.F. e RUSSELL, A.D. - "Applications of Linear programming in structural Lay-out and optimization", Rev. Computer & Structures, vol. IV, nº 4, 1974.
- [18] SPILLERS, W.R. - "Iterative design for optimal geometry", Journal of the Structural Division (ASCE), Julho 1975.

- [19] VANDERPLAATS, G.N. e MOSES, F. - "Automated design of trusses for optimum geometry", Journal of the Structural Division (ASCE), março 1972.
- [20] VANDERPLAATS, G.N. - "Design of structures for optimum geometry", Anais do III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1975.
- [21] VENANCIO, Filho F. - "Análise matricial de estruturas", Almeida Neves - Editores, 1975.
- [22] WALSH, G.R. - "Methods of optimization", John Wiley & Sons 1975.
- [23] WEAVER, Jr. W. - "Computer programs for structural analysis", Van Nostrand Reinhold, 1967.